ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

336/4

DIE ASYMPTOTISCHE VERTEILUNG DER EIGENWERTE SINGULÄRER STURM-LIOUVILLE-PROBLEME

VON

KONRAD JÖRGENS

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.336-04

Am 9. November 1962 vorgelegt von P. J. MYRBERG und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1963

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Sturm-Liouville-Probleme der Form

$$\text{(I)} \qquad -u'' + q(x)\,u = \lambda\,u\,, \qquad 0 < x < \infty\,,$$
$$q(x) \quad \text{reell}\,, \qquad q(x) \in C(0\,,\infty)\,,$$

betrachtet. Ist $q(x)$ zum Beispiel an der Stelle $x = 0$ stetig und für alle x nach unten beschränkt, also $q(x) \geqq q_0 > -\infty$ für $x \in [0\,,\infty)$, so ist für jedes $\alpha \in [0\,,\pi)$ der Operator $A = -d^2/dx^2 + q(x)$ im Teilraum

$$\text{(II)} \qquad D(A): \quad \begin{cases} u(x)\,,\ u'(x) \quad \text{totalstetig}\,, \\ \cos\alpha\ u(0) - \sin\alpha\ u'(0) = 0\,, \\ u\,,\ -u'' + q\,u \ \in L_2(0\,,\infty) \end{cases}$$

des Hilbertsraumes $L_2(0\,,\infty)$ selbstadjungiert. Der unterhalb der Zahl $\lambda_0 = \liminf\limits_{x\to\infty} q(x)$ gelegene Teil des Spektrums von A ist diskret, nämlich er besteht aus einer abzählbaren (möglicherweise auch endlichen oder leeren) Menge einfacher Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_0$, die sich nur bei λ_0 häufen können [1]). Man definiert $N(\lambda)$ für $\lambda < \lambda_0$ als die Anzahl der Eigenwerte unterhalb λ. Ist λ_0 Häufungspunkt von Eigenwerten, so strebt $N(\lambda)$ gegen ∞ für $\lambda \to \lambda_0 -$, und es soll ein asymptotischer Ausdruck für $N(\lambda)$ angegeben werden. Es ist bekannt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Formel

$$\text{(III)} \qquad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \big(\lambda - q(x)\big)_+^{1/2}\,dx \qquad \text{für } \lambda \to \lambda_0 -$$

gilt. Hierin ist $\big(\lambda - q(x)\big)_+ = \max\{0\,,\lambda - q(x)\}$ gesetzt. Im Falle $\lambda_0 = \infty$ ist diese Formel seit langem bekannt; sie gilt z. B. wenn $q(x)$ von einer Stelle x_0 an monoton wächst und wenn $x^3\,q'(x)$ mit x gegen ∞ strebt [2]). Im Falle $\lambda_0 < \infty$ kann man ohne Beschränkung

[1]) Weyl [8], Kap. IV.

[2]) Hartman [2]; vgl. auch [6], Theorem 7.4.

der Allgemeinheit $\lambda_0 = 0$ annehmen[3]). Nach J. Lanke[4]) gilt dann die asymptotische Formel (III), wenn für $x \geqq x_0 > 0$ die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) $q(x)$ wächst monoton,

(2) $-\dfrac{c_1}{x^{2\alpha}} \leqq q(x) \leqq -\dfrac{c_2}{x^{2\beta}}$

mit $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $0 < \alpha \leqq \beta < \dfrac{\alpha\,(2-\alpha)}{1+\alpha-\alpha^2}\ (\leqq 1)$.

Der Beweis von Lanke beruht auf einer Vergleichsmethode und der Approximation von $q(x)$ durch Treppenfunktionen, während die Beweise im Falle $\lambda_0 = \infty$ meist von folgender Tatsache Gebrauch machen: Für $\lambda < \lambda_0$ hat die durch $\varphi(0) = \sin\alpha$, $\varphi'(0) = \cos\alpha$ definierte Lösung $\varphi(x, \lambda)$ der Dgl. (I), welche also der Randbedingung in (II) genügt, genau $N(\lambda)$ Nullstellen in $(0, \infty)$[5]). Dies gilt natürlich auch im Falle $\lambda_0 < \infty$.

Die angegebene asymptotische Formel versagt, wenn

$$q(x) = -\frac{c}{(1+x)^2}, \qquad c > 0,$$

gesetzt wird[6]), denn in diesem Falle gilt

$$\int_0^\infty \big(\lambda - q(x)\big)_+^{1/2}\, dx \to \infty \qquad \text{für } \lambda \to 0-,$$

während $N(\lambda)$ für $c \leqq 1/4$ beschränkt bleibt; dies folgt leicht aus der Tatsache, dass die Dgl. $-u'' + q\,u = 0$ nicht oszillatorisch ist, und dass $\varphi(x, \lambda)$ genau $N(\lambda)$ Nullstellen hat. Für $c > 1/4$ gilt $N(\lambda) \to \infty$ für $\lambda \to 0-$[7]). Es liegt nahe, das Versagen der Formel (III) dadurch zu korrigieren, dass man die rechte Seite durch den Ausdruck

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\lambda - q(x) - \frac{1}{4x^2}\right)_+^{1/2} dx$$

ersetzt. In dem genannten Spezialfall erhält man dann $I(\lambda) \equiv 0$, falls $c \leqq 1/4$. Tatsächlich ist die Formel

---

[3]) Man ersetze $q(x)$ durch $q(x) - \lambda_0$.
[4]) Lanke [3]; vgl. auch de Wet und Mandl [7].
[5]) Siehe z. B. Titchmarsh [6], Chap. V.
[6]) Vgl. die Bemerkung in [3], S. 77.
[7]) Vgl. das zweite Beispiel in § 3.

$$N(\lambda) \sim I(\lambda) \qquad \text{für } \lambda \to \lambda_0 -$$

unter geringeren Voraussetzungen beweisbar als die alte Formel (III); dies wird in § 1 dieser Arbeit für $\lambda_0 = 0$ und für $\lambda_0 = \infty$ durchgeführt. Sie hat ausserdem den Vorteil, auch noch für gewisse Funktionen $q(x)$ mit singulärem Verhalten bei $x = 0$ richtig zu bleiben, wie in § 2 gezeigt werden soll. Der § 3 bringt zwei Beispiele, welche zeigen, dass man unter weiteren Voraussetzungen über $q(x)$ sogar

$$N(\lambda) = I(\lambda) + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to \lambda_0 -$$

erwarten darf. Diese Formel wird in § 4 für Funktionen $q(x) \sim -c/x^{2\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$, $c > 0$ und in § 5 für $\alpha = 1$, $c > 1/4$ unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen.

§ 1. Beweis der Formel

Wichtigstes Hilfsmittel des Beweises ist das folgende

Lemma 1. [8]) *Sei $Q(x)$ eine positive, stetige Funktion von beschränkter Schwankung in $[x_1, x_2]$ und n die Zahl der Nullstellen einer reellen Lösung der Dgl. $u'' + Q^2(x)\,u = 0$ im offenen Intervall (x_1, x_2). Dann gilt*

$$\left| n - \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} Q(x)\,dx \right| \leqq 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{|d\,Q(x)|}{Q(x)} .$$

Es wird zunächst der Fall $\lambda_0 = 0$ behandelt.

Satz 1. *Sei $q(x) \in C[0, \infty)$; für $x \geqq x_0 > 0$ sei*

$$p(x) = q(x) + \frac{1}{4x^2}$$

monoton wachsend und strebe gegen Null für $x \to \infty$. Sei $b(\lambda)$ für $p(x_0) < \lambda < 0$ als Lösung der Gleichung $p(b) = \lambda$ definiert. Dann gilt

$$N(\lambda) = I(\lambda) + O\big(\log b(\lambda)\big) \qquad \textit{für } \lambda \to 0 - .$$

Beweis. Das Intervall $(0, \infty)$ wird durch x_0 und $b(\lambda)$ in drei Teile geteilt. In jedem Teilintervall wird die Anzahl der Nullstellen der durch $\varphi(0) = \sin\alpha$, $\varphi'(0) = \cos\alpha$ definierten Lösung $\varphi(x, \lambda)$ der Dgl. (I) abgeschätzt.

(1) Für $0 < x \leqq x_0$ ist die Anzahl $n_1(\lambda)$ der Nullstellen von

---
[8]) Hartman [2]; vgl. Titchmarsh [6], S. 146.

$\varphi(x, \lambda)$ für $\lambda < 0$ nach dem Vergleichs-Satz von Sturm [9]) nicht grösser als $n_1(0)$; ferner ist

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0} \bigl(\lambda - p(x)\bigr)_+^{1/2}\, dx \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0} \bigl(-q(x)\bigr)_+^{1/2}\, dx$$

beschränkt und daher $n_1(\lambda) = I_1(\lambda) + O(1)$ für $\lambda \to 0-$.

(2) Für $x_0 < x < b(\lambda)$ sei $n_2(\lambda)$ die Anzahl der Nullstellen von $\varphi(x, \lambda)$. Sei $p(x_0) < \lambda < 0$; dann ist

$$\lambda - q(x) = \lambda - p(x) + \frac{1}{4x^2} \geqq \frac{1}{4x^2} > 0,$$

und $\lambda - q(x)$ ist monoton fallend im Intervall $[x_0, b(\lambda)]$. Mit $Q(x) = \sqrt{\lambda - q(x)}$ folgt aus Lemma 1

$$\left| n_2(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{b} \sqrt{\lambda - q(x)}\, dx \right| \leqq 1 + \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{b} \frac{-d\,Q(x)}{Q(x)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda - q(x_0)}}{\sqrt{\lambda - q(b)}} \leqq 1 + \frac{1}{2\pi}\log\left[2\,b(\lambda)\sqrt{-q(x_0)}\right].$$

Weiter ist

$$0 \leqq \int_{x_0} \left\{\sqrt{\lambda - q(x)} - \sqrt{\lambda - p(x)}\right\} dx = \int_{x_0}^{b} \frac{p(x) - q(x)}{\sqrt{\lambda - q(x)} + \sqrt{\lambda - p(x)}}\, dx$$

$$\leqq \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\log\frac{b(\lambda)}{x_0}.$$

Mit

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{b} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx$$

erhält man also

$$n_2(\lambda) = I_2(\lambda) + O\bigl(\log b(\lambda)\bigr) \qquad \text{für } \lambda \to 0-.$$

(3) Für $x \geqq b(\lambda)$ ist $\lambda - q(x) \leqq 1/(4x^2)$; nach dem Vergleichs-Satz von Sturm [9]) hat $\varphi(x, \lambda)$ in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle mehr als jede Lösung der Dgl.

$$v'' + \frac{1}{4x^2}v = 0,$$

also höchstens zwei. Es gilt also $n_3(\lambda) \leqq 2$.

[9]) Vgl. Titchmarsh [6], S. 107.

(4) Setzt man die Ergebnisse (1), (2) und (3) zusammen, so erhält man wegen $N(\lambda) = n_1(\lambda) + n_2(\lambda) + n_3(\lambda)$ und wegen $I(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$ die Behauptung.

Die Formel $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ folgt nun aus Satz 1, falls $\log b(\lambda) = o(I(\lambda))$ ist. Dies ist sicher der Fall, wenn zusätzlich die Ungleichungen

$$-\frac{c_1}{x^{2\alpha}} \leqq q(x) \leqq -\frac{c_2}{x^{2\beta}} \qquad \text{für } x \geqq x_0$$

mit $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ und $0 < \alpha \leqq \beta < 1$ erfüllt sind. Daraus folgt nämlich leicht

$$b(\lambda) \leqq \left(\frac{c_1}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \qquad \text{und} \qquad I(\lambda) \geqq \left(\frac{c_3}{-\lambda}\right)^{\frac{1-\beta}{2\beta}}$$

mit einer positiven Konstanten c_3. Die untere Schranke für $q(x)$ kann man aber noch wesentlich verkleinern, denn man braucht ja nur

$$\log b(\lambda) = o\left(\left(\frac{1}{-\lambda}\right)^{\frac{1-\beta}{2\beta}}\right)$$

oder

$$-p(b) = -\lambda = o\left((\log b)^{\frac{-2\beta}{1-\beta}}\right)$$

für $\lambda \to 0-$ d. h. für $b \to \infty$ zu fordern; wegen $-p(x) < -q(x)$ erhält man schliesslich:

Satz 1a. *$q(x)$ genüge den Voraussetzungen von Satz 1, und es gelte ausserdem $q(x) \leqq -c_2/x^{2\beta}$ für $x \geqq x_0$ mit Konstanten $c_2 > 0$ und $0 < \beta < 1$, sowie*

$$-q(x) = o\left[(\log x)^{\frac{-2\beta}{1-\beta}}\right] \qquad \text{für } x \to \infty .$$

Dann gilt die asymptotische Formel $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ für $\lambda \to 0-$.

Für $\beta = 1$ und $c_2 > 1/4$ versagt der obige Schluss. Sei z. B.

$$q(x) = -\frac{\frac{1}{4} + \mu^2}{(1+x)^2}, \qquad \mu > 0 ,$$

so gilt $I(\lambda) \sim c_4 \log \dfrac{1}{-\lambda}$ und $b(\lambda) = \dfrac{\mu}{\sqrt{-\lambda}} - 1$, sodass der Fehlerterm und $I(\lambda)$ gleiche Grössenordnung haben. Der Satz 1 liefert hier also nur $N(\lambda) = O\left(\log \dfrac{1}{-\lambda}\right)$. Tatsächlich gilt für dieses Beispiel dennoch die asymptotische Formel, sogar mit beschränktem Fehlerglied, wie in § 3 gezeigt wird.

Es werde nun der Fall $\lambda_0 = \infty$ betrachtet.

Satz 2. *Sei* $q(x) \in C[0\,,\,\infty)$; *für* $x \geqq x_0 > 0$ *sei*

$$p(x) = q(x) + \frac{1}{4\,x^2}$$

monoton wachsend und strebe gegen ∞ *für* $x \to \infty$. *Mit* $b(\lambda)$ *wie in Satz 1 gilt dann*

$$N(\lambda) = I(\lambda) + O\big(\log\big[\sqrt{\lambda}\, b(\lambda)\big]\big) \qquad \textit{für } \lambda \to \infty\,.$$

Beweis. Es wird wie bei Satz 1 die Teilung des Intervalls durch x_0 und $b(\lambda)$ verwendet und die Zahl der Nullstellen von $\varphi(x\,,\,\lambda)$ in den Teilintervallen mit den entsprechenden Beiträgen zum Integral $I(\lambda)$ verglichen.

(1) Die Anzahl der Nullstellen von $\varphi(x\,,\,\lambda)$ in $(0\,,\,x_0]$ ist

$$n_1(\lambda) = \frac{x_0}{\pi}\sqrt{\lambda} + O\,(1) \qquad \textit{für} \quad \lambda \to \infty\,.$$

Dies folgt aus bekannten asymptotischen Formeln[10]. Weiter ist $q_1 \leqq q(x) \leqq q_2$ für $0 \leqq x \leqq x_0$ und daher liegt die Zahl

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\left(\lambda - q(x) - \frac{1}{4\,x^2}\right)_+^{1/2} dx$$

zwischen den beiden Zahlen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\left(\lambda - q_i - \frac{1}{4\,x^2}\right)_+^{1/2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{(\lambda - q_i)\,x_0^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{2\sqrt{(\lambda - q_i)\,x_0^2 - \frac{1}{4}}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{x_0}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to \infty\,.$$

Also gilt $n_1(\lambda) = I_1(\lambda) + O(1)$ für $\lambda \to \infty$.

(2) Für $x_0 < x < b(\lambda)$ wird wie im Beweis von Satz 1 verfahren und es ergibt sich

---

[10]) Vgl. Titchmarsh [6], Lemma 1.7 (ii).

$$| n_2(\lambda) - I_2(\lambda) | \leqq 1 + \frac{1}{2\pi} \log \left[2\, b(\lambda) \sqrt{\lambda - q(x_0)} \right] + \frac{1}{2\pi} \log \frac{b(\lambda)}{x_0}$$
$$= O\big(\log [\sqrt{\lambda}\, b(\lambda)]\big) .$$

(3) Für $x \geqq b(\lambda)$ erhält man $n_3(\lambda) \leqq 2$ wie bei Satz 1. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Formel $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ folgt aus Satz 2, falls $\log [\sqrt{\lambda}\, b(\lambda)] = o\big(I(\lambda)\big)$ ist. Um Bedingungen hierfür zu finden, schätzt man $I(\lambda)$ wie folgt ab:

$$I(\lambda) \geqq \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{b\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx \geqq \frac{b\left(\frac{\lambda}{2}\right) - x_0}{\pi} \sqrt{\lambda - p\left(b\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)}$$
$$= \frac{b\left(\frac{\lambda}{2}\right) - x_0}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geqq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, b\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

falls λ gross genug ist. Sei nun $q(x) \geqq c_4 (\log x)^2$ für $x \geqq 2$ mit $c_4 > 0$. Daraus folgt

$$\lambda = p(b) \geqq q(b) \geqq c_4 (\log b)^2$$

und schliesslich

$$\log [\sqrt{\lambda}\, b(\lambda)] \leqq \log \sqrt{\lambda} + \sqrt{\frac{\lambda}{c_4}} \leqq c_5 \sqrt{\lambda}$$
$$= o\left(\sqrt{\lambda}\, b\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) = o\big(I(\lambda)\big) .$$

Damit hat man:

Satz 2a. *$q(x)$ genüge den Voraussetzungen von Satz 2, und es gelte ausserdem $q(x) \geqq c (\log x)^2$ für $x \geqq 2$ mit $c > 0$. Dann gilt $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ für $\lambda \to \infty$.*

§ 2. Koeffizienten $q(x)$ mit Singularität bei $x = 0$

Es soll nun gezeigt werden, dass gewisse Singularitäten der Funktion $q(x)$ bei $x = 0$ die Gültigkeit der asymptotischen Formel nicht aufheben. Wenn $q(x)$ bei $x = 0$ singulär ist, existieren die Randwerte $u(0)$, $u'(0)$ der Lösungen der Dgl. (I) im allgemeinen nicht mehr, und die Randbedingung in (II) wird sinnlos. Wie H. Weyl[11]) gezeigt hat, ist eine

[11]) Weyl [8].

Randbedingung überflüssig, falls bei $x = 0$ der Grenzpunktfall vorliegt. Dann ist $A = -d^2/dx^2 + q(x)$ in dem Definitionsbereich

$$D(A): \quad \begin{cases} u\,,\ u' \quad \text{totalstetig,} \\ u\,,\ -u'' + q\,u \ \in L_2(0\,,\infty) \end{cases}$$

selbstadjungiert. Liegt bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vor, so ist eine Randbedingung der Form

$$\lim_{x \to 0+} \{\, u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x) \,\} = 0$$

zu stellen, wo $v(x)$ eine reelle Lösung der Dgl. $-v'' + q\,v = 0$ ist. Nach J. Berkowitz [12]) ist der unterhalb von λ_0 gelegene Teil des Spektrums von A genau dann diskret, wenn die Dgl. (I) für $\lambda < \lambda_0$ bei $x = 0$ nicht oszillatorisch ist, d. h. wenn 0 nicht Häufungspunkt von Nullstellen einer Lösung der Dgl. sein kann.

Die Beweismethode ist im vorliegenden Fall dieselbe wie vorher. Es sei $\varphi(x\,,\lambda)$ eine reelle Lösung der Dgl. (I), welche »links in $D(A)$ liegt» und irgendwie normiert ist, d. h. es sei im Grenzpunktfall $\varphi(x\,,\lambda)$ über $(0\,,1)$ quadratisch integrierbar und im Grenzkreisfall genüge $\varphi(x\,,\lambda)$ der Randbedingung. Als Normierung kann man etwa

$$\int_0^1 |\varphi(x\,,\lambda)|^2\, dx = 1$$

wählen. Dann ist wie im regulären Fall $N(\lambda)$ gleich der Zahl der Nullstellen von $\varphi(x\,,\lambda)$ in $(0\,,\infty)$ [13]). Zunächst wird wieder der Fall $\lambda_0 = 0$ behandelt.

Satz 3. *Sei* $q(x) \in C(0\,,\infty)$; *es gelte:*

(1) $p(x) = q(x) + \dfrac{1}{4\,x^2}$ *wächst monoton für* $x \geqq x_0 > 0$ *und* $p(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$.

(2) $\displaystyle\int_0^{x_0} \big(-p(x)\big)_+^{1/2}\, dx < \infty\,.$

(3) *Die Dgl.* $-v'' + q\,v = 0$ *ist bei* $x = 0$ *nicht oszillatorisch.*

Dann gilt $N(\lambda) = I(\lambda) + O\big(\log b(\lambda)\big)$ *für* $\lambda \to 0-$.

Beweis. (1) Im Intervall $0 < x \leqq x_0$ ist die Zahl $n_1(\lambda)$ der Nullstellen von $\varphi(x\,,\lambda)$ nach dem Vergleichs-Satz von Sturm [9]) nicht grösser als $n_1(0)$, und dies ist endlich wegen Voraussetzung (3). Ferner ist

[12]) Berkowitz [1], Theorem 4.5.

[13]) Es genügt zu wissen, dass $|n(\lambda) - N(\lambda)| \leqq 2$ ist; das folgt aus [1], Theorems 4.1 und 4.3.

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0} (\lambda - p(x))_+^{1/2}\, dx \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0} (-p(x))_+^{1/2}\, dx < \infty$$

nach Voraussetzung (2). Also gilt $n_1(\lambda) = I_1(\lambda) + O(1)$ für $\lambda \to 0-$. Die Schritte (2) und (3) unterscheiden sich nicht von den entsprechenden Schritten im Beweis von Satz 1.

Ergänzt man die Voraussetzungen von Satz 3 durch Wachstumsbeschränkungen für $q(x)$ wie in Satz 1a, so folgt die Gültigkeit der Formel $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ für $\lambda \to 0-$ wie dort.

Ein ähnliches Resultat gilt im Fall $\lambda_0 = \infty$.

Satz 4. *Sei* $q(x) \in C(0, \infty)$; *es gelte:*

(1) $p(x) = q(x) + \dfrac{1}{4x^2}$ *wächst monoton für* $x \geqq x_0 > 0$.

(2) $q(x) \geqq c(\log x)^2$ *für* $x > 2$ *mit* $c > 0$.

(3) $p(x) \geqq -\dfrac{c'}{x}$ *für* $x \leqq x_0$ *mit* $c' > 0$.

Dann gilt $N(\lambda) \sim I(\lambda)$ *für* $\lambda \to \infty$.

Beweis. (1) Wegen

$$\lambda - q(x) \leqq \lambda + \frac{c'}{x} + \frac{1}{4x^2}$$

ist nach dem Sturmschen Vergleichs-Satz $n_1(\lambda)$ höchstens um 1 grösser als die Zahl der Nullstellen einer beliebigen reellen Lösung der Dgl.

$$v'' + \left(\lambda + \frac{c'}{x} + \frac{1}{4x^2}\right) v = 0$$

in $(0, x_0]$. Eine solche Lösung ist

$$v(x, \lambda) = \operatorname{Re} \frac{M_{\varkappa,0}(2i\sqrt{\lambda}\, x)}{\sqrt{2i\sqrt{\lambda}}}, \qquad \varkappa = \frac{c'}{2i\sqrt{\lambda}},$$

worin $M_{\varkappa,\mu}(z)$ eine konfluente hypergeometrische Funktion bedeutet[14]). Aus der Reihenentwicklung von $M_{\varkappa,\mu}(z)$ bei $z = 0$ folgt

$$\left.\begin{aligned} v(x, \lambda) &= \sqrt{x}\,\{1 + O(x)\} \\ v'(x, \lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\{1 + O(x)\} \end{aligned}\right\} \quad \text{für } x \to 0+,$$

sodass für beliebige λ, λ' die Formel

$$\lim_{x \to 0+} \{v(x, \lambda)\, v'(x, \lambda') - v'(x, \lambda)\, v(x, \lambda')\} = 0$$

---

[14]) Siehe Magnus—Oberhettinger [4], Kap. VI, § 2.

gilt. Mit Hilfe der Schlussweise, die man im Beweis des Sturmschen Vergleichs-Satzes anwendet, zeigt man nun, dass die Nullstellen von $v(x, \lambda)$ monoton abnehmende Funktionen von λ sind. Also ist die Zahl $m(\lambda)$ der Nullstellen von $v(x, \lambda)$ in $(0, x_0]$ gleich $m(0)$ plus der Zahl der Nullstellen von $v(x_0, \lambda')$ im Intervall $0 < \lambda' \leqq \lambda$. Mit Hilfe der Formel

$$M_{\varkappa,0}(z) = \frac{e^{i\pi\varkappa}}{i}\left\{\frac{W_{\varkappa,0}(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varkappa\right)} - \frac{W_{-\varkappa,0}(-z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varkappa\right)}\right\},$$

worin $W_{\varkappa,\mu}(z)$ die Whittakersche Funktion bedeutet, und mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung der Whittakerschen Funktion erhält man

$$v(x_0, \lambda) = -\frac{e^{\frac{3\pi c'}{4\sqrt{\lambda}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\lambda}}\sin\left[\sqrt{\lambda}\,x_0 + \frac{c'}{2\sqrt{\lambda}}\log(2\sqrt{\lambda}\,x_0)\right]\left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}$$

für $\lambda \to \infty$ und daraus $m(\lambda) = \frac{x_0}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(1)$ für $\lambda \to \infty$. Also ist

$$n_1(\lambda) \leqq \frac{x_0}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to \infty .$$

Ferner ist

$$I_1(\lambda) \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\left(\lambda + \frac{c'}{x}\right)_+^{1/2} dx = \frac{x_0}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(1),$$

und es folgt $n_1(\lambda) = I_1(\lambda) + O(\sqrt{\lambda})$ für $\lambda \to \infty$.

Teil (2) und (3) des Beweises sind identisch mit Teil (2) und (3) des Beweises von Satz 2.

(4) Insgesamt hat man nun, indem man die Ergebnisse von (1), (2) und (3) zusammensetzt

$$N(\lambda) = I(\lambda) + O(\sqrt{\lambda}) + O\left(\log\left[\sqrt{\lambda}\,b(\lambda)\right]\right).$$

Bei Satz 2a wurde schon die Ungleichung

$$I(\lambda) \geqq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,b\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

hergeleitet; sie zeigt, dass $\sqrt{\lambda} = o(I(\lambda))$ ist. Der andere Fehlerterm wurde schon bei Satz 2a durch $o(I(\lambda))$ abgeschätzt. Damit ist der Satz bewiesen.

Es wäre wünschenswert, die Voraussetzung (3) in Satz 4 durch die Voraussetzungen (2) und (3) von Satz 3 zu ersetzen. Wie aus dem obigen Beweis unmittelbar zu sehen ist, würde es dazu genügen, die Zahl der Nullstellen von $\varphi(x, \lambda)$ in $(0, x_0]$ durch $O(\sqrt{\lambda})$ abzuschätzen.

§ 3. Beispiele

Das erste Beispiel ist das wohlbekannte Problem des Wasserstoffatoms aus der Quantenmechanik; hier ist

$$q(x) = \frac{q_0}{x^2} + \frac{q_1}{x}, \qquad q_0 \geqq -\frac{1}{4}, \qquad q_1 < 0 .$$

Diese Funktion genügt den Voraussetzungen von Satz 3. Die Lösungen der Dgl. verhalten sich (für jedes komplexe λ) bei $x = 0$ wie x^ϱ bzw. $x^{1-\varrho}$ mit $\varrho = \frac{1}{2} + \sqrt{q_0 + \frac{1}{4}}$, sodass für $q_0 \geqq 3/4$ der Grenzpunktfall, für $q_0 < 3/4$ der Grenzkreisfall vorliegt. Stellt man im Grenzkreisfall die Randbedingung mit Hilfe der reellen Lösung $v(x)$ von $-v'' + q\,v = 0$, die sich wie x^ϱ verhält (physikalische Randbedingung), so erhält man bekanntlich für alle q_0 die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{-q_1^2}{4\,(\varrho + n - 1)^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Andererseits berechnet man leicht

$$I(\lambda) = \frac{-q_1}{2\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{q_0 + \frac{1}{4}},$$

und daraus folgt

$$I(\lambda_n) = n - \frac{1}{2} = N(\lambda_n) + \frac{1}{2}.$$

Da $N(\lambda)$ und $I(\lambda)$ monoton nicht-abnehmende Funktionen sind, erhält man hieraus die Ungleichung $|N(\lambda) - I(\lambda)| \leqq 3/2$. Wählt man im Grenzkreisfall (also falls $q_0 < 3/4$) irgendeine andere Randbedingung bei $x = 0$, so gilt für die zugehörigen Eigenwerte λ_n' bzw. für die zugehörige Anzahlfunktion $N'(\lambda)$ die Ungleichung $|N(\lambda) - N'(\lambda)| \leqq 2$ [13]) und daher $|N'(\lambda) - I(\lambda)| \leqq 7/2$. Für jede Wahl der Randbedingung gilt also die Formel

$$N(\lambda) = I(\lambda) + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0- .$$

Übrigens ist im vorliegenden Fall für $q_0 \geqq 0$ auch

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\lambda - q(x)\right)_+^{1/2} dx = \frac{-q_1}{2\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{q_0}$$

und somit

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \big(\lambda - q(x)\big)_+^{1/2}\,dx + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0-,$$

während für $q_0 < 0$ das Integral nicht existiert.

Als zweites Beispiel werde

$$q(x) = -\frac{\frac{1}{4}+\mu^2}{(1+x)^2}, \qquad \mu > 0,$$

gewählt; die Randbedingung sei $u(0) = 0$. Es gibt für $\lambda < 0$ nur eine quadratisch integrierbare Lösung der Dgl., nämlich

$$u(x,\lambda) = (1+x)^{1/2}\,K_{i\mu}\big(\sqrt{-\lambda}\,(1+x)\big),$$

wo $K_\nu(z)$ die modifizierte Hankelfunktion bezeichnet[15]; λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn $u(0,\lambda) = K_{i\mu}\big(\sqrt{-\lambda}\big) = 0$ ist. Daraus folgt leicht die Beziehung

$$N(\lambda) = \frac{\mu}{\pi}\log\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0-.$$

Andererseits ergibt eine einfache Abschätzung des Integrals die asymptotische Formel

$$I(\lambda) = \frac{\mu}{\pi}\log\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0-$$

und daher $N(\lambda) = I(\lambda) + O(1)$ für $\lambda \to 0-$. Bei diesem Beispiel ist übrigens

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \big(\lambda - q(x)\big)_+^{1/2}\,dx = \frac{\sqrt{\mu^2+\frac{1}{4}}}{\pi}\log\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} + O(1);$$

und dies ist nicht $\sim N(\lambda)$ für $\lambda \to 0-$.

§ 4. Die asymptotische Formel mit beschränktem Restglied

Die Beispiele in § 3 machen es wahrscheinlich, dass man die Formel $N(\lambda) = I(\lambda) + O(1)$ für $\lambda \to 0-$ unter geeigneten Voraussetzungen über $q(x)$ allgemein beweisen kann. In allen bisher bekannten Fällen (mit $\lambda_0 = \infty$) sind asymptotische Formeln mit beschränktem Rest nur

---

[15]) Siehe [4], Kap. III.

unter Voraussetzungen über $q(x)$ und dessen erste und zweite Ableitung gefunden worden. Man kommt durch Betrachtung des Beispiels

$$q(x) = -x^{-2\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

zu geeigneten Voraussetzungen. Hier ist nämlich

$$q(x) < 0, \quad q'(x) > 0, \quad q''(x) < 0, \quad -\frac{x\,q''(x)}{q'(x)} = 2\alpha + 1 < 3.$$

Tatsächlich ist es vorteilhafter, Voraussetzungen über

$$p(x) = q(x) + \frac{1}{4x^2}$$

zu machen; das Ergebnis lautet wie folgt:

Satz 5. *Sei* $q(x) \in C^{(2)}(0, \infty)$; *es gelte*

(1) $p(x) < 0$, $p'(x) > 0$, $p''(x) < 0$ *für* $x \geqq x_0 > 0$.

(2) $p(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$.

(3) $\limsup\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-x\,p''(x)}{p'(x)} \right) < 3$.

(4) $\displaystyle\int_0^{x_0} (-p(x))_+^{1/2}\,dx < \infty$.

(5) $-v'' + q\,v = 0$ *ist bei* $x = 0$ *nicht oszillatorisch.*

Dann gilt $N(\lambda) = I(\lambda) + O(1)$ *für* $\lambda \to 0-$.

Bemerkung. Ist ausserdem $q(x) \in C[0, \infty)$ und ersetzt man in den Voraussetzungen (1), (2) und (3) p, p', p'' durch q, q', q'', so gilt auch

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\lambda - q(x))_+^{1/2}\,dx + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0-.$$

Dies findet man leicht, indem man den folgenden Beweis geringfügig abändert.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3 ist die Zahl der Nullstellen der »links in $D(A)$ liegenden» reellen Lösung $\varphi(x, \lambda)$ der Dgl. (I) für $\lambda < 0$ in verschiedenen Teilintervallen abzuschätzen; jedoch werden es diesmal fünf Teile sein, die durch die vier Punkte

$$x_1, \quad \varrho_1 b(\lambda), \quad \varrho_2 b(\lambda), \quad b(\lambda)$$

getrennt werden, wobei $b(\lambda)$ Lösung der Gleichung $p(b) = \lambda$ ist. Die Intervalle werden in der Reihenfolge von rechts nach links behandelt, sodass mit (5) zu beginnen ist.

(5) Für $x \geqq b(\lambda)$ zeigt man wie im Beweis von Satz 1, dass die Anzahl $n_5(\lambda)$ der Nullstellen von $\varphi(x, \lambda)$ höchstens 2 beträgt.

(4) Für $\varrho_2 b(\lambda) \leqq x < b(\lambda)$ mit noch zu wählendem $\varrho_2 < 1$ wird die Vergleichsmethode von Langer angewandt [16]), jedoch mit der Abweichung, dass $q(x)$ überall durch $p(x)$ ersetzt wird. Es wird also gesetzt

$$\xi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\lambda - p(t)}\, dt$$

und

$$v_\nu(x) = \big(\lambda - p(x)\big)^{-1/4} [\xi(b) - \xi(x)]^{1/2} J_\nu\big(\xi(b) - \xi(x)\big),$$

worin $J_\nu(z)$ die Besselfunktion der Ordnung ν bezeichnet. Die Funktion $v_\nu(x)$ genügt der Dgl.

$$v'' + [\lambda - q(x) - \psi_\nu(x, \lambda)]\, v = 0$$

mit

$$\psi_\nu(x, \lambda) = \frac{1}{4\, x^2} + \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\lambda - p(x)}{[\xi(b) - \xi(x)]^2} + \frac{1}{4} \frac{p''(x)}{\lambda - p(x)} + \frac{5}{16} \left[\frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}\right]^2 .$$

Es wird sich zeigen, dass ϱ_2 so gewählt werden kann, dass für $\varrho_2 b \leqq x < b$ die Ungleichungen $\psi_0(x, \lambda) \leqq 0$ und $\psi_{1/2}(x, \lambda) \geqq 0$ gelten. Die Anzahl $n_4(\lambda)$ der Nullstellen von $\varphi(x, \lambda)$ genügt dann nach dem Sturmschen Vergleichs-Satz den Ungleichungen $n_4(\lambda, 1/2) - 1 \leqq n_4(\lambda) \leqq n_4(\lambda, 0) + 1$, wenn $n_4(\lambda, \nu)$ die Anzahl der Nullstellen von $v_\nu(x)$ in $[\varrho_2 b, b)$ bezeichnet. Nun ist aber

$$n_4(\lambda, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_2 b}^{b} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx + O(1)$$

für $b(\lambda) \to \infty$, d. h. für $\lambda \to 0 -$ [17]), und daher gilt

$$n_4(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_2 b}^{b} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx + O(1) .$$

Zum Beweis der Abschätzungen für $\psi_\nu(x, \lambda)$ setze man

$$P_\lambda(x) = \frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}, \qquad A(x) = -\frac{x\, p''(x)}{p'(x)} .$$

Nach Voraussetzung (1) und (3) ist für $x \geqq x_0$

---

16) Vgl. Titchmarsh [5], Chap. VII.

17) Siehe z. B. [5], S. 128.

$$P_\lambda(x) = \frac{p'(x)}{p(b) - p(x)} = \frac{p'(x)}{(b - x)\, p'(x^*)} \geqq \frac{1}{b - x}$$

und $0 < A(x) \leqq A_0$ mit einer geeigneten Konstanten A_0. Damit folgt

$$\begin{aligned} 4\,\psi_{1/2}(x\,,\lambda) &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\, A(x)\, P_\lambda(x) + \frac{5}{4}\, P_\lambda^2(x) \\ &\geqq \frac{1}{x^2} - \frac{A_0}{x}\, P_\lambda(x) + \frac{5}{4}\, P_\lambda^2(x) \\ &= \frac{5}{4}\left(P_\lambda(x) - \frac{2}{5}\frac{A_0}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5}\frac{A_0^2}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Sei nun $\varrho' b \leqq x < b$, wo ϱ' so nahe bei 1 gewählt sei, dass

$$\frac{\varrho'}{1 - \varrho'} \geqq \frac{4}{5} A_0$$

ist; dann ist

$$P_\lambda(x) - \frac{2}{5}\frac{A_0}{x} \geqq \frac{2}{5}\frac{A_0}{x}$$

und folglich $\psi_{1/2}(x\,,\lambda) \geqq 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= \frac{p'(b)}{p(b) - p(x)} - \frac{p'(b) - p'(x)}{p(b) - p(x)} \\ &= \frac{p'(b)}{(b - x)\, p'(x^*)} - \frac{p''(\bar{x})}{p'(\bar{x})} \\ &\leqq \frac{1}{b - x} + \frac{A_0}{x} \end{aligned}$$

und

$$\xi(b) - \xi(x) = \int_x^b \sqrt{\lambda - p(t)}\, dt$$

$$\leqq \int_x^b \sqrt{\lambda - p(t)}\, \frac{p'(t)}{p'(b)}\, dt = \frac{2}{3}\, \frac{[\lambda - p(x)]^{3/2}}{p'(b)}\,.$$

Damit erhält man

$$4\,\psi_0(x\,,\lambda) \leqq \frac{1}{x^2} - \frac{9}{4}\left[\frac{p'(b)}{\lambda - p(x)}\right]^2 + \frac{p''(x)}{\lambda - p(x)} + \frac{5}{4}\left[\frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}\right]^2$$

$$\leqq \frac{1}{x^2} - P_\lambda^2(x) - \frac{9}{4}\,\frac{2\,p'(\bar{x})\,p''(\bar{x})}{[\lambda - p(x)]^2}\,(b - x)$$

$$\leqq \frac{1}{x^2} - P_\lambda^2(x) + \frac{9}{2}\,\frac{A(\bar{x})}{\bar{x}}\,P_\lambda^2(x)\,(b - x)$$

$$\leqq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(b - x)^2} + \frac{9}{2}\,\frac{A_0}{x}\left(1 + A_0\frac{b - x}{x}\right)\left(\frac{1}{b - x} + \frac{A_0}{x}\right).$$

Sei nun $\varrho''\,b \leqq x < b$; dann ist

$$4\,b^2\,\psi_0(x\,,\lambda) \leqq \frac{1}{(\varrho'')^2} - \frac{1}{(1 - \varrho'')^2} + \frac{9}{2}\,\frac{A_0}{\varrho''}\left(1 + \frac{A_0}{\varrho''}\right)\left(\frac{1}{1 - \varrho''} + \frac{A_0}{\varrho''}\right),$$

und dies ist $\leqq 0$, wenn ϱ'' genügend nahe bei 1 liegt. Mit $\varrho_2 = \max(\varrho'\,,\varrho'')$ ist Teil (4) des Beweises nun vollständig.

(3) Für $\varrho_1\,b(\lambda) < x < \varrho_2\,b(\lambda)$ wird das Lemma 1 aus § 1 benutzt. Ist $n_3(\lambda)$ die Anzahl der Nullstellen von $\varphi(x\,,\lambda)$ in diesem Intervall, so folgt aus Lemma 1

$$\left|n_3(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b}\sqrt{\lambda - q(x)}\,dx\right| \leqq 1 + \frac{1}{4\,\pi}\int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b}\frac{q'(x)\,dx}{\lambda - q(x)}$$

$$\leqq 1 + \frac{1}{4\,\pi}\int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b}\left\{P_\lambda(x) + \frac{2}{x}\right\}dx$$

$$\leqq 1 + \frac{1}{4\,\pi}\int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b}\left\{\frac{1}{b - x} + \frac{A_0 + 2}{x}\right\}dx$$

$$= 1 + \frac{1}{4\,\pi}\left\{\log\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2} + (A_0 + 2)\log\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right\}.$$

Ausserdem gilt [18])

$$0 \leqq \int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b}\{\sqrt{\lambda - q(x)} - \sqrt{\lambda - p(x)}\}\,dx \leqq \frac{1}{2}\log\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

und damit

---

[18]) Vgl. Teil (2) des Beweises von Satz 1.

$$n_3(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_1 b}^{\varrho_2 b} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx + O(1) \qquad \text{für } \lambda \to 0-,$$

wenn ϱ_1 unabhängig von λ, sonst aber beliebig gewählt wird.

(2) Für $x_1 \leqq x \leqq \varrho_1 b(\lambda)$ mit $x_1 \geqq x_0$ wird folgendes Lemma benutzt:

Lemma 2. [19]) *Sei*

$$R(x, \lambda) = \frac{1}{4}\big(\lambda - p(x)\big)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{p''(x)}{\lambda - p(x)} + \frac{5}{4}\left[\frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}\right]^2 \right\}$$

und

$$\int_{x_1}^{\varrho_1 b} |R(x, \lambda)|\, dx \leqq \delta < \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \textit{für } \lambda' \leqq \lambda < 0;$$

dann gilt für die Anzahl $n_2(\lambda)$ *der Nullstellen einer reellen Lösung der Dgl. (I) in* $[x_1, \varrho_1 b]$ *die Abschätzung*

$$n_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\varrho_1 b} \sqrt{\lambda - p(x)}\, dx + O(1) \qquad \textit{für } \lambda \to 0-.$$

Zur Anwendung des Lemmas muss man $R(x, \lambda)$ abschätzen; zunächst ist offenbar

$$|R(x, \lambda)| \leqq \frac{1}{4}\big(\lambda - p(x)\big)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{A(x)}{x} P_\lambda(x) + \frac{5}{4} P_\lambda^2(x) \right\}$$

mit den in Teil (4) definierten Funktionen

$$A(x) \leqq A_0 \qquad \text{und} \qquad P_\lambda(x) \leqq \frac{1}{b - x} + \frac{A_0}{x}.$$

Für $x_0 \leqq x \leqq \varrho_1 b$ ist aber

$$\frac{1}{b - x} \leqq \frac{\varrho_1}{1 - \varrho_1} \frac{1}{x}$$

und daher

$$|R(x, \lambda)| \leqq \frac{C}{x^2 \sqrt{\lambda - p(x)}}$$

mit

[19]) Man erhält es aus einem Lemma in [5], S. 131, indem man überall $q(x)$ durch $p(x)$ ersetzt.

$$C = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{A_0\,\varrho_1}{1-\varrho_1} + A_0^2 + \frac{5}{4}\left[\frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} + A_0\right]^2\right\}.$$

Man kann nun x_2 so gross und ϱ_1 so klein wählen, dass eine Zahl $\beta < 1$ existiert, mit der

$$P_\lambda(x) \leqq \frac{2\,\beta}{x} \qquad \text{für} \quad x_2 \leqq x \leqq \varrho_1\, b(\lambda)$$

gilt. Ist das bewiesen, so folgt mit $x_2 \leqq x_1 \leqq x \leqq \varrho_1\, b(\lambda)$

$$\int\limits_{x_1}^{x} P_\lambda(t)\, dt = \log \frac{\lambda - p(x_1)}{\lambda - p(x)} \leqq 2\,\beta \log \frac{x}{x_1}$$

und daraus

$$[\lambda - p(x)]^{-1/2} \leqq [\lambda - p(x_1)]^{-1/2}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta}$$

sowie

$$[\lambda - p(x_1)]^{-1/2} \leqq [\lambda - p(x_2)]^{-1/2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\beta}$$

durch Ersetzung von x, x_1 durch x_1, x_2. Mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen erhält man schliesslich für $\lambda \geqq \lambda' > p(x_2)$

$$\int\limits_{x_1}^{\varrho_1 b} |R(x\,,\lambda)|\, dx \leqq \frac{C\, x_1^{-\beta}}{\sqrt{\lambda - p(x_1)}} \int\limits_{x_1}^{\varrho_1 b} x^{\beta-2}\, dx$$

$$\leqq \frac{C}{(1-\beta)\, x_1 \sqrt{\lambda - p(x_1)}} \leqq \frac{C\, x_2^{-\beta}}{(1-\beta)\sqrt{\lambda' - p(x_2)}}\, x_1^{\beta-1}\,.$$

Also kann man x_1 unabhängig von λ so wählen, dass das Integral nicht grösser als $\delta < 1/(2\sqrt{2})$ wird.

Zum Beweis der Abschätzung für $P_\lambda(x)$ kann man Gebrauch von einer Dgl. für $P_\lambda(x)$ machen. Es gilt

$$P_\lambda'(x) = \frac{p''(x)}{\lambda - p(x)} + \left[\frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}\right]^2$$

oder

$$P_\lambda' = P_\lambda^2 - \frac{A(x)}{x}\, P_\lambda\,.$$

Nach Voraussetzung (3) kann man x_2 so wählen, dass $A(x) < 2\,\alpha + 1$ für $x \geqq x_2$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt. Es liegt nahe, P_λ mit Hilfe der Lösung Q_λ der Dgl.

$$Q'_\lambda = Q^2_\lambda - \frac{2\alpha + 1}{x} Q_\lambda$$

zu vergleichen, wobei $Q_\lambda(x_3) = P_\lambda(x_3)$ sei mit $x_3 = \varrho_3\, b(\lambda)$ und mit einer festen Zahl $\varrho_3 < 1$. Es folgt dann

$$P_\lambda(x) \leqq Q_\lambda(x) \qquad \text{für} \quad x_2 \leqq x \leqq x_3 .$$

Denn mit $D_\lambda = P_\lambda - Q_\lambda$ gilt

$$\begin{aligned} D'_\lambda &= P^2_\lambda - Q^2_\lambda - \frac{A(x)}{x} P_\lambda + \frac{2\alpha + 1}{x} Q_\lambda \\ &> P^2_\lambda - Q^2_\lambda - \frac{2\alpha + 1}{x} (P_\lambda - Q_\lambda) \\ &= D_\lambda \left(P_\lambda + Q_\lambda - \frac{2\alpha + 1}{x} \right). \end{aligned}$$

Also ist $D_\lambda(x_3) = 0$, $D'_\lambda(x_3) > 0$, folglich $D_\lambda(x) < 0$ für $x < x_3$ und x nahe genug bei x_3. Gäbe es einen Punkt x mit $D_\lambda(x) > 0$, so auch eine Nullstelle ξ von D_λ mit $D'_\lambda(\xi) \leqq 0$ im Widerspruch zur oben hergeleiteten Ungleichung $D'_\lambda(\xi) > 0$. Man berechnet leicht

$$Q_\lambda(x) = \frac{2\alpha}{x \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2\alpha}{B_\lambda} \right) \left(\frac{x}{x_3} \right)^{2\alpha} \right\}},$$

worin $B_\lambda = x_3\, Q_\lambda(x_3)$ gesetzt ist. Nun ist aber

$$B_\lambda = \varrho_3\, b\, P_\lambda(\varrho_3\, b) \leqq \frac{\varrho_3}{1 - \varrho_3} + A_0 = B$$

und folglich für $x_2 \leqq x \leqq \varrho_1\, b \leqq \varrho_3\, b$

$$P_\lambda(x) \leqq \frac{2\alpha}{x \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2\alpha}{B} \right) \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3} \right)^{2\alpha} \right\}}.$$

Wählt man nun ϱ_1 klein genug, so ist $P_\lambda(x) \leqq 2\beta/x$ mit $\beta < 1$ für $x_2 \leqq x \leqq \varrho_1\, b(\lambda)$, wie behauptet.

(1) Im Intervall $0 < x < x_1$ ist der Beweis genau wie bei Satz 3 zu führen. Die Zahl der Nullstellen von $\varphi(x, \lambda)$ und das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \left(\lambda - p(x) \right)_+^{1/2} dx$$

sind beide für $\lambda < 0$ beschränkt.

Zusammensetzung der Ergebnisse (1) bis (5) ergibt die Behauptung.

§ 5. Der Fall $p(x) \sim -c/x^2$

In diesem Fall muss man etwas mehr über $p(x)$ voraussetzen. Es handelt sich in gewissem Sinne um einen Grenzfall, was sich auch darin zeigt, dass eine Formel (III) mit beschränktem Rest nicht mehr gelten kann. Das sieht man aus dem zweiten Beispiel in § 3.

Satz 6. *Sei* $q(x) \in C^{(2)}(0, \infty)$; *es gelte*

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} p(x) &= -\frac{c}{x^2}\{1+\varepsilon_0(x)\}, \\ p'(x) &= \frac{2c}{x^3}\{1+\varepsilon_1(x)\}, \\ p''(x) &= -\frac{6c}{x^4}\{1+\varepsilon_2(x)\} \end{aligned}$$

für $x \geqq x_0 > 0$ *mit* $c > 0$ *und mit* $\varepsilon_i(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$ *sowie mit*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{|\varepsilon_i(x)|}{x}\, dx < \infty .$$

$$\text{(2)} \qquad \int_0^{x_0} \big(-p(x)\big)_+^{1/2}\, dx < \infty .$$

(3) *Die Dgl.* $-v'' + q\,v = 0$ *ist bei* $x = 0$ *nicht oszillatorisch.*
Dann gilt $N(\lambda) = I(\lambda) + O(1)$ *für* $\lambda \to 0-$.

Beweis. Es wird dieselbe Teilung des Intervalls $(0, \infty)$ wie im Beweis von Satz 5 vorgenommen, und Teile (1), (3), (4) und (5) dieses Beweises können unverändert übernommen werden. Teil (2) muss geändert werden, da im vorliegenden Fall $A(x) \to 3$ für $x \to \infty$ gilt. Wie dort ist zu zeigen, dass für die Funktion

$$R(x, \lambda) = \frac{1}{4}\big(\lambda - p(x)\big)^{-1/2}\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{p''(x)}{\lambda - p(x)} + \frac{5}{4}\left[\frac{p'(x)}{\lambda - p(x)}\right]^2\right\}$$

die Abschätzung

$$\int_{x_1}^{\varrho_1 b} |R(x, \lambda)|\, dx \leqq \delta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

gilt, falls x_1 und ϱ_1 unabhängig von λ geeignet gewählt werden. Es ist

$$R(x, \lambda) = \frac{\big(\lambda - p(x)\big)^2 + x^2\big(\lambda - p(x)\big)\,p''(x) + \frac{5}{4}[p'(x)]^2\, x^2}{4\,x^2\big(\lambda - p(x)\big)^{5/2}} .$$

Es sei x_2 so gewählt, dass $|\varepsilon_i(x)| \leqq 1/4$ für $x \geqq x_2$ erfüllt ist; ferner sei $\varrho_3 \leqq 1/\sqrt{5}$; dann gilt für $x_2 \leqq x \leqq x_3 = \varrho_3 b$

$$\begin{aligned} \lambda - p(x) &= p(b) - p(x) \\ &= \frac{c}{x^2}\left\{1 + \varepsilon_0(x) - \frac{x^2}{b^2}\big(1 + \varepsilon_0(b)\big)\right\} \\ &\geqq \frac{c}{x^2}\left\{\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\varrho_3^2\right\} \geqq \frac{c}{2\,x^2}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} &|R(x\,,\lambda)| \\ &\leqq \frac{\sqrt{2}\,x^3}{c^{5/2}}\left|p^2(x) - x^2\,p(x)\,p''(x) + \frac{5}{4}\,x^2\,[p'(x)]^2 + \lambda\,x^2 p''(x) - 2\,\lambda\,p(x) + \lambda^2\right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c\,x}}\Big|\big(1 + \varepsilon_0(x)\big)^2 - 6\,\big(1 + \varepsilon_0(x)\big)\,\big(1 + \varepsilon_2(x)\big) + 5\,\big(1 + \varepsilon_1(x)\big)^2 \\ &\qquad - \frac{\lambda\,x^2}{c}\big(4 + 6\,\varepsilon_2(x) - 2\,\varepsilon_0(x)\big) + \frac{\lambda^2\,x^4}{c^2}\Big| \\ &\leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c\,x}}\left\{\varepsilon_3(x) + \frac{15}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \frac{25}{16}\left(\frac{x}{b}\right)^4\right\} \end{aligned}$$

mit Benutzung der Ungleichung $|\lambda| \leqq 5\,c/(4\,b^2)$ und mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x) &= |\varepsilon_0^2(x) - 4\,\varepsilon_0(x) - 6\,\varepsilon_2(x) - 6\,\varepsilon_0(x)\,\varepsilon_2(x) + 10\,\varepsilon_1(x) + 5\,\varepsilon_1^2(x)| \\ &\leqq \frac{5}{4}\,|\varepsilon_0(x)| + \frac{45}{4}\,|\varepsilon_1(x)| + \frac{15}{2}\,|\varepsilon_2(x)|\,. \end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_3(x)}{x}\,dx < \infty$$

und daher mit $x_2 \leqq x_1 < \varrho_1 b \leqq \varrho_3 b$

$$\int_{x_1}^{\varrho_1 b} |R(x\,,\lambda)|\,dx \leqq \sqrt{\frac{2}{c}}\left\{\int_{x_1}^{\infty} \frac{\varepsilon_3(x)}{x}\,dx + \frac{15}{4}\,\varrho_1^2 + \frac{25}{64}\,\varrho_1^4\right\};$$

dies ist kleiner als $1/(2\sqrt{2})$, wenn x_1 genügend gross und ϱ_1 genügend klein gewählt werden. Damit ist der Beweis vollständig.

Universität Heidelberg, Deutschland
und
Aarhus Universitet, Danmark

Literatur

[1] BERKOWITZ, J.: On the discreteness of spectra of singular Sturm-Liouville problems. - Comm. Pure Appl. Math. 12, 1959, S. 523–542.

[2] HARTMAN, P.: On the eigenvalues of differential equations. - Amer. J. Math. 73, 1951, S. 657–662.

[3] LANKE, J.: On the asymptotic distribution of eigenvalues of certain one-dimensional Sturm-Liouville-operators. - Math. Scand. 9, 1961, S. 69–79.

[4] MAGNUS, W., und F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. - 2. Aufl., Grundlehren math. Wiss. LII, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1948.

[5] TITCHMARSH, E. C.: Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. I. - 1. Aufl., Clarendon Press, Oxford, 1946.

[6] —»— Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. I. - 2. Aufl., Clarendon Press, Oxford, 1962.

[7] DE WET, J. S., und F. MANDL: On the asymptotic distribution of eigenvalues. - Proc. Roy. Soc. London A 200, 1950, S. 572–580.

[8] WEYL, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. - Math. Ann. 68, 1910, S. 220–269.

Printed April 1963.