ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

336/5

# EINFÜHRUNG VON SPINOREN AUF RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

VON

GUIDO KARRER

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.336-05

Am 11. Januar 1963 vorgelegt von P. J. MYRBERG und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1963

## Einführung von Spinoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

1. *Einleitung.* Die Idee, Spinoren im Zusammenhang mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu bringen, und so den algebraischen Begriff eines Spinors in die Differentialgeometrie zu übertragen, tauchte erstmalig in der Physik auf, und zwar im Zusammenhang mit dem Problem, die Diracsche Gleichung für ein freies Elektron

$$\sum_{i=1}^{4} \gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \varkappa \psi = 0$$

der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen[1]). Das mathematische Interesse an diesen Grössen ist in neuester Zeit wieder durch Untersuchungen von Atiyah und Singer geweckt worden, im Zusammenhang mit topologischen Invarianten, welche aus der Verallgemeinerung des Dirac-Operators

$$D = \sum_{i=1}^{4} \gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

gewonnen werden können.

Wir wollen uns hier mit den beiden differentialgeometrischen Problemen beschäftigen, welche zu Anfang der Theorie von Spinoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten stehen, nämlich deren Definition als Elemente eines Vektorraumbündels und die Einführung eines linearen Zusammenhangs in diesem Spinorbündel. Mittels des linearen Zusammenhanges wird dann der Dirac-Operator gebildet.

Unsere Definition von Spinoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten hat einen etwas anderen Ausgangspunkt als die übliche, in welcher die Spinoren durch Erweiterung der orthogonalen Strukturgruppe des Tangentenbündels auf die universelle Überlagerungsgruppe erhalten werden [4]. Wir streben nämlich eine einheitliche Definition an, welche für alle geraden Dimensionen der Mannigfaltigkeit und alle Metriken, also auch solche, die indefinit sind, gültig ist. Es ist deshalb zweckmässig, von der algebraischen

---

[1]) $\{\gamma^i\}$ ist ein System von $4 \times 4$ -reihigen komplexen Matrizen mit den Relationen $\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = \pm 2 \delta^{ik} I$, und $\psi$ eine Funktion von $x = (x^1, \ldots, x^4)$ mit Werten in $\boldsymbol{C}^4$.

Definition eines Spinors auszugehen, nach welcher dieser ein Element des Darstellungsraumes einer irreduziblen Darstellung einer Clifford-Algebra ist.

Weiter werden wir uns auf komplexe Darstellungsräume beschränken, was die Klassifizierung von Darstellungen Cliffordscher Algebren wesentlich vereinfacht.

Es geht uns hauptsächlich darum, den differentialgeometrischen Begriff des Spinors auf möglichst natürliche Weise aus dem algebraischen herzuleiten, und überhaupt eine Übersicht über die dabei auftretenden Struktursätze zu geben. Um diese Darstellung nicht allzu schwerfällig zu gestalten, haben wir auf alle Beweise, die für das Verständnis nicht absolut notwendig sind, verzichtet.

Wir wollen noch erwähnen, dass ein nach der üblichen Methode definiertes Spinorbündel nach Komplexifizierung in ein Spinorbündel gemäss unserer Definition übergeht.

2. *Clifford-Algebren.* Im folgenden stellen wir einige algebraische Definitionen und Resultate zusammen, deren genaue Begründung in [2], [1] zu finden sind.

Es sei $X$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen, sowie $\beta$ eine symmetrische Bilinearform auf $X$ mit Werten im Koeffizientenbereich von $X$. Weiter sei $Q$ die zu $\beta$ assoziierte quadratische Form, d. h.

$$Q(x) = \beta(x\,,x)\,, \quad x \in X\,.$$

Es gibt dann zu $X$ und $\beta$ eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte assoziative, unitäre Algebra $C(X\,,\beta)$ über demselben Koeffizientenbereich wie $X$, sodass gilt:

(2.1) *$X$ liegt in $C(X\,,\beta)$ und erzeugt diese, und es ist*

$$x^2 = Q(x)\,1 \quad \textit{für alle} \quad x \in X,$$

*wo $x^2 = x\,x$ die Multiplikation in $C(X\,,\beta)$ und* 1 *das Einselement von $C(X\,,\beta)$ bedeutet;*

(2.2) *für jede assoziative Algebra $A$ mit Einselement $1_A$ über demselben Koeffizientenbereich wie $X$ und lineare Abbildung $\varphi: X \to A$ mit der Eigenschaft*

$$(\varphi\, x)^2 = Q(x)\, 1_A \quad \textit{für alle} \quad x \in X\,,$$

*gibt es einen (einzigen) Algebra-Homomorphismus*

$$\Phi: \ C(X\,,\beta) \to A\,,$$

*welcher $\varphi$ erweitert.*

*$C(X, \beta)$ ist die Clifford-Algebra von $(X, \beta)$.*

Für $\beta = 0$ geht $C(X, \beta)$ in die *äussere Algebra* $E(X)$ über, d. h. $E(X) = C(X, \beta = 0)$. Für beliebiges $\beta$ gibt es nun einen kanonischen, linearen Isomorphismus $\mu_\beta : E(X) \to C(X, \beta)$, von welchem man folgende Eigenschaft zeigt ([1], exercise 3c), S. 154):

**Lemma 1.** *Sei $\beta$ auf $X$ nicht entartet, d. h. die Gleichung*

$$\beta(x, y) = 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in X \quad \textit{und festes} \quad y \in X$$

*sei nur für $y = 0$ erfüllt. Sei $n = \dim X$, und es sei $\{x_i\}_{i=1\ldots n}$ eine in $\beta$ orthogonale Basis von $X$. Dann ist*

$$\mu_\beta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = x_1 \ldots x_n ,$$

*wobei $x \wedge y$ das Produkt in $E(X)$, $x y$ das Produkt in $C(X, \beta)$ bedeutet.*

Man kann die Menge der orthonormierten Basen von $(X, \beta)$ ($\beta$ nicht entartet) in zwei Äquivalenzklassen einteilen, wobei $\{x_i\} \sim \{x_i'\}$ definiert wird, falls der Übergang $\{x_i\} \to \{x_i'\}$ durch ein Element aus $O^+(X, \beta)$ (= orthogonale, unimodulare Gruppe von $(X, \beta)$) geleistet wird; jede der beiden Äquivalenzklassen legt eine Orientierung von $(X, \beta)$ fest. Da nun für $\{x_i\} \sim \{x_i'\}$

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = x_1' \wedge \ldots \wedge x_n'$$

gilt, so folgt also auch

$$x_1 \ldots x_n = x_1' \ldots x_n' .$$

**Definition 1.** *Für eine Orientierung $\Omega$ von $(X, \beta)$ heisse das Element $c_\Omega \in C(X, \beta)$, definiert durch*

$$c_\Omega = x_1 \ldots x_n = \mu_\beta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

*für $\{x_i\} \in \Omega$, das kanonische Element von $\Omega$.*

Wir sind nun hauptsächlich an folgendem Fall interessiert: $X$ ist ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\boldsymbol{C}$, komplexe Dimension von $X$ ist gerade ($\dim X = n = 2m$), $\beta$ nicht entartet. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann:

**Lemma 2.** $(c_\Omega)^2 = (-1)^m$ ( $1 = 1$-*Element von* $C(X, \beta)$ ),

$$c_\Omega x = -x c_\Omega \quad \textit{für alle} \quad x \in X .$$

**Lemma 3.** *$C(X, \beta)$ ist eine einfache, zentrale Algebra. $C(X, \beta)$ ist somit isomorph der Endomorphismenalgebra eines komplexen Vektorraumes $S$, des Spinorraumes von $(X, \beta)$. Gemäss Lemma 1 ist* $\dim C(X, \beta) = \dim E(X) = 2^{2m}$, *also* $\dim S = 2^m$.

Unter den gleichen Voraussetzungen gilt weiter noch folgendes

**Lemma 4.** *Sei* $c \in C(X, \beta)$ *mit der Eigenschaft*

$$c\,x = -\,x\,c \quad \textit{für alle } x \in X\,;$$

*dann ist*

$$c = \lambda\, c_\Omega \qquad \textit{für } \lambda \in \boldsymbol{C}\,.$$

Denn das Element $c\,c_\Omega^{-1}$ ist mit allen $x \in X$ vertauschbar, liegt somit im Zentrum von $C(X, \beta)$, und da diese zentral ist, ist $c\,c_\Omega^{-1} = \lambda\,1$.

3. *Clifford-Algebren in Kategorien.* Clifford-Algebren können unter allgemeineren Voraussetzungen als in § 2 angenommen, definiert werden. Man kann etwa statt Vektorräume über $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$ beliebige unitäre $R$-Moduln nehmen, wobei $R$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Man kann noch weiter gehen und alles in einer vorgegebenen Kategorie $K$ von $R$-Moduln formulieren, was zu folgender axiomatischen Definition von Clifford-Algebren führt.

Es sei $X$ ein Objekt von $K$, $\beta$ eine symmetrische Bilinearform auf $X$ mit Werten in $R$, die irgendwie als in $K$ zulässig definiert sei. Ein Objekt $C(X, \beta)$ von $K$, das gleichzeitig eine assoziative unitäre Algebra ist, heisst dann *Clifford-Algebra von* $(X, \beta)$ *in* $K$, wenn (2.1) und (2.2) für zulässige Elemente aus $K$ erfüllt ist. Falls $C(X, \beta)$ existiert, dann ist es wegen (2.2) eindeutig bis auf Isomorphie in $K$ bestimmt.

Es sei nun insbesondere $M$ eine reelle, differenzierbare Mannigfaltigkeit[2]) und $V$ eine der beiden Kategorien

$V_{\boldsymbol{R}}$ = Kategorie der reellen (differenzierbaren) Vektorbündel über $M$ als Basis,

$V_{\boldsymbol{C}}$ = Kategorie der komplexen (differenzierbaren) Vektorbündel über $M$ als Basis,

wobei Hom $(\xi, \eta)$ für $\xi, \eta \in V$ aus denjenigen (differenzierbaren) Bündelabbildungen $\xi \to \eta$ besteht, welche den Basisraum $M$ punktweise festlassen[3]). Die Kategorie $\Gamma(V)$ der (differenzierbaren) Schnittmoduln $\Gamma(\xi)$, $\xi \in V$, sei mit $K$ (genauer: $K_{\boldsymbol{R}}$ resp. $K_{\boldsymbol{C}}$) bezeichnet[4]).

[2]) »Differenzierbar» soll im folgenden immer »$C^\infty$-differenzierbar» bedeuten. Alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten werden als parakompakt vorausgesetzt.

[3]) Ist $E'$ der Bündelraum von $\xi$, $E''$ derjenige von $\eta$, dann soll also $f \in \text{Hom}(\xi, \eta)$ eine differenzierbare Abbildung $f \colon E' \to E''$ sein, die jede Faser $\xi_x$ linear in $\eta_x$ abbildet, $x \in M$.

[4]) Die Schnittmoduln $\Gamma(\xi)$ werden als $F$-Moduln aufgefasst, wobei $F$ einen der beiden Ringe $F_{\boldsymbol{R}}$ (= reellwertige differenzierbare Funktionen auf $M$) oder $F_{\boldsymbol{C}}$ (= komplexwertige differenzierbare Funktionen auf $M$) bedeutet. Hom $(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$ in $K$ ist als $F$-Modul in natürlicher Weise $\Gamma\,\text{Hom}(\xi, \eta)$ in $V$ isomorph, und ist selbst wieder ein Schnittmodul $\in K$.

Wir wollen noch definieren, was unter einer in $K$ zulässigen symmetrischen Bilinearform $\beta$ auf $\Gamma(\xi)$ zu verstehen ist. Sie soll erstens einmal eine im algebraischen Sinne symmetrische Bilinearform auf dem $F$-Modul $\Gamma(\xi)$ mit Werten in $F$ sein, und ausserdem soll sie von einem metrischen Feld $\tilde{\beta}$ auf herrühren. Das letztere bedeutet ein differenzierbares Feld $\tilde{\beta}$ von symmetrischen Bilinearformen $\tilde{\beta}_x$ auf $\xi_x$, der Faser von $\xi$ über $x \in M$, mit Werten in $\boldsymbol{R}$ resp. $\boldsymbol{C}$, sodass jedes $\tilde{\beta}_x$ nichtentartet und, für ein reelles Bündel $\xi$, alle $\tilde{\beta}_x$ denselben Index haben[5]). Die Beziehung zwischen $\tilde{\beta}$ und dem von ihm induzierten $\beta$ ist dann durch die Gleichung

$$\beta(s\,,\,s')(x) = \tilde{\beta}_x(s(x)\,,\,s'(x))\,,\quad x \in M\,,$$

für Schnitte $s$ und $s'$ in $\xi$ gegeben.

In dieser Kategorie lässt sich also zu jedem Paar $(X = \Gamma(\xi)\,,\,\beta)$ eine Clifford-Algebra $C(X\,,\,\beta)$ definieren. Wir beweisen im nächsten Abschnitt die Existenz von $C(X\,,\,\beta)$. $C(X\,,\,\beta)$ ist per definitionem der Schnittmodul eines Bündels $\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$; da $C(X\,,\,\beta)$ eine Algebra ist, ist $\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$ ein Algebrabündel über $M$ (d. h. die Faser $F$ von $\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$ ist eine Algebra, die Strukturgruppe von $\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$ die Automorphismengruppe von $F$).

**Definition 2.** *$\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$ ist das Clifford-Bündel von $(\xi\,,\,\tilde{\beta})$.*

Sei nun $(M\,,\,\tilde{\beta})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ($\tilde{\beta}$ ist ein metrisches Feld auf dem Tangentenbündel $\tau$ von $M$). $\tilde{\beta}$ induziert ein metrisches Feld $\tilde{\beta}^*$ auf dem Kotangentenbündel $\tau^*$ von $M$, woraus man durch Komplexifizierung das Bündel $\tau_c^*$ mit metrischem Feld $\tilde{\beta}_c^*$ erhält.

**Definition 3.** *Das Clifford-Bündel $\gamma(\tau_c^*\,,\,\tilde{\beta}_c^*)$ heisst das Clifford-Bündel der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M\,,\,\tilde{\beta})$ und wird mit $\gamma(M\,,\,\tilde{\beta})$ bezeichnet.*

Der Grund dieser Definition wird erst im Zusammenhang mit dem Dirac-Operator ersichtlich.

4. *Clifford-Bündel.* $\gamma(\xi\,,\,\tilde{\beta})$ ist im vorhergehenden Abschnitt mittels seines Schnittmoduls definiert worden. Wir wollen hier noch eine Charakterisierung im Rahmen der Kategorie $V$ der differenzierbaren (reellen oder komplexen) Vektorbündel über der Basis $M$ angeben, die den Eigenschaften (2.1) und (2.2) entspricht.

Es sei $V$ die typische Faser von $\xi$, $\tilde{\beta}_0$ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform auf $V$ mit Werten in $\boldsymbol{R}$ resp. $\boldsymbol{C}$, welche (im Fall eines reellen Vektorbündels $\xi$) denselben Index wie $\tilde{\beta}$ haben soll, und es sei

[5]) Der Index einer reellen, symmetrischen Bilinearform ist definiert als die Anzahl der negativen Eigenwerte der Form.

$C(V, \tilde{\beta}_0)$ die Clifford-Algebra von $(V, \tilde{\beta}_0)$ im Sinne von § 2. Das Clifford-Bündel $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ ist dann ein (reelles resp. komplexes) differenzierbares Algebrabündel über $M$ mit typischer Faser $C(V, \tilde{\beta}_0)$, welches durch die folgenden beiden Eigenschaften festgelegt ist:

(4.1) *$\xi$ ist Teilbündel von $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$, und für jedes $x \in M$ ist die Faser $\gamma_x$ die Clifford-Algebra $C(\xi_x, \tilde{\beta}_x)$; insbesondere ist also für $b \in \xi_x$*

$$b^2 = \tilde{\beta}_x(b, b)\, 1_x \qquad (1_x = \textit{Einselement von } \gamma_x)\,.$$

(4.2) *Sei $\eta \in V$ ein Algebrabündel*[6]*, und $\varphi : \xi \to \eta$ ein Homomorphismus in $V$ mit der für alle $x \in M$ gültigen Eigenschaft*

$$(\varphi_x b)^2 = \tilde{\beta}_x(b, b)\, 1'_x \quad \textit{für alle } b \in \xi_x \quad (1'_x = 1\textit{-Element von } \eta_x)\,.$$

*Es gibt dann genau einen Homomorphismus $\Phi : \gamma(\xi, \tilde{\beta}) \to \eta$ der Algebrabündel, welcher $\varphi$ erweitert.*

Die Eigenschaft (4.2) folgt bereits aus (4.1), denn die Erweiterung von $\varphi_x$ auf $\Phi_x$ kann wegen (2.2) auf jeder Faser $\gamma_x$ vorgenommen werden.

Dass $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ zu gegebenem $(\xi, \tilde{\beta})$ wirklich existiert, zeigt folgende Plausibilitätsbetrachtung. Man erweitere jede Faser $\xi_x$ zur Clifford-Algebra $\gamma_x = C(\xi_x, \tilde{\beta}_x)$ und versehe die Vereinigung $E' = \bigcup_{x \in M} \gamma_x$ mit einer passenden differenzierbaren Struktur, sodass $\pi' : E' \to M$ zu einem Algebrabündel wird. Der genaue Beweis, auf den wir hier nicht eingehen, erfolgt durch Betrachtung der lokalen Produktstruktur.

Wir wollen hier noch auf eine Beziehung zwischen dem Clifford-Bündel $\gamma(M, \tilde{\beta})$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \tilde{\beta})$ und dem Bündel $\eta(M)$ aller komplexwertigen $p$-Formen, $0 \leqq p \leqq \dim M$, auf $M$ aufmerksam machen. Letzteres hat nämlich als Fasern $\eta_x$ gerade die äusseren Algebren $E(\tau^*_{cx})$, wo $\tau^*_{cx}$ die Faser im komplexifizierten Kotangentenbündel $\tau^*_c$ ist. Der nach § 2 existierende kanonische lineare Isomorphismus zwischen äusserer und Clifford-Algebra führt deshalb zu einem (kanonischen) linearen Isomorphismus der Bündel $\eta(M)$ und $\gamma(M, \tilde{\beta})$.

5. *Spinoren.* Die folgenden Definitionen stehen in genauer Entsprechung zum algebraischen Fall (siehe § 2).

**Definition 4.** *Sei $\xi$ ein komplexes Vektorbündel über $M$ von gerader Dimension, $\tilde{\beta}$ ein metrisches Feld auf $\xi$. Ein komplexes Vektorbündel $\sigma$ über $M$ heisst ein Spinorbündel von $(\xi, \tilde{\beta})$, falls sein Homomorphismenbündel $\varepsilon(\sigma)$ isomorph dem Clifford-Bündel $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ ist.*

---

[6]) Die typische Faser eines Algebrabündels wird in dieser Arbeit als assoziativ und unitär vorausgesetzt.

Aus § 2 folgt deshalb:

**Lemma 5.** *Ist* $n = \dim \xi = 2m$, *dann ist* $\dim \sigma = 2^m$.

Sei nun $(M, \tilde{\beta})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition 5.** $\dim M$ *sei gerade. Ein Spinorbündel* $\sigma$ *von* $(\tau_c^*, \tilde{\beta}_c^*)$ *im Sinne der Definition 4 ist ein Spinorbündel der Riemannschen Mannigfaltigkeit* $(M, \tilde{\beta})$.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

**Lemma 6.** *Sei* $\dim M = n = 2m$. *Ein komplexes Vektorbündel* $\sigma$ *mit* $\dim \sigma = 2^m$ *ist dann und nur dann Spinorbündel von* $(M, \tilde{\beta})$, *falls ein (reeller) Homomorphismus* $\varphi : \tau^* \to \varepsilon(\sigma)$ (= *Homomorphismenbündel von* $\sigma$) *mit der auf jeder Faser* $\tau_x^*$ *gültigen Eigenschaft*

$$(\varphi_x h^*)^2 = \tilde{\beta}_x(h^*, h^*) \, 1_x , \quad h^* \in \tau_x^* \quad (1_x = \textit{identische Abbildung auf } \sigma_x)$$

*existiert.*

Der Beweis geschieht durch Erweiterung von $\varphi$ auf $\tau_c^*$ und nachherige Anwendung von (4.2).

**Theorem 1.** *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit* $(M, \tilde{\beta})$ *sei orientierbar. Jedes Spinorbündel* $\sigma$ *von* $(M, \tilde{\beta})$ *ist direkte Summe zweier Vektorbündel*

$$\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$$

*mit* $\dim \sigma_1 = \dim \sigma_2$.

Das Theorem beruht auf folgendem

**Lemma 7.** *Sei* $\Omega$ *eine Orientierung der Riemannschen Mannigfaltigkeit* $(M, \tilde{\beta})$. *Es gibt einen kanonischen Schnitt* $c_\Omega \in \Gamma(\gamma(M, \tilde{\beta}))$ *mit den Eigenschaften*

$$(c_\Omega)^2 = (-1)^m,$$

$$h^* c_\Omega = - c_\Omega h^* \quad \textit{für alle} \quad h^* \in \Xi^* = \Gamma(\tau^*),$$

*wo* 1 *der* 1-*Schnitt in* $\gamma(M, \tilde{\beta})$ *und* $2m = \dim M$ *ist. Ausserdem ist jeder Schnitt* $c \in \Gamma(\gamma(M, \tilde{\beta}))$, *mit*

$$h^* c = - c h^* \qquad \textit{für alle} \quad h^* \in \Xi^*,$$

*von der Form* $c = \lambda c_\Omega$, $\lambda \in F_C$.

Der Beweis von Lemma 7 erfolgt durch Anwendung von Lemma 2 und Lemma 4 auf jeder Faser $\gamma_x$ von $\gamma(M, \tilde{\beta})$. Ist nun $\sigma$ ein Spinorbündel von $(M, \tilde{\beta})$ und $\Phi : \gamma(M, \tilde{\beta}) \to \varepsilon(\sigma)$ der Isomorphismus, dann wirkt $c_\Omega$ mittels $\Phi$ als Automorphismus auf $\sigma$ und zerlegt dieses in seine zwei »Eigenräume» $\sigma_1$ und $\sigma_2$, welche zu den Eigenwerten $+1$ und $-1$ (falls $m$ gerade) oder $+i$ und $-i$ gehören (falls $m$ ungerade). Die Gleichheit der Dimensionen von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ folgt daraus, dass für jedes $h^* \in \Xi^*$

mit $\beta^*(h^*, h^*) \neq 0$, $\Phi h^*$ wieder ein Automorphismus von $\sigma$ ist, welcher $\sigma_1$ und $\sigma_2$ vertauscht.

6. *Linearer Zusammenhang.* Dieser Abschnitt bringt eine Zusammenstellung von einigen für uns wichtigen Sätzen über lineare Zusammenhänge auf Vektorbündeln.

$\Xi$ bezeichne den Schnittmodul des Tangentenbündels $\tau$ von $M$; $\xi$ sei ein Vektorbündel über $M$, $\Gamma(\xi)$ dessen Schnittmodul.

**Definition 6.** *Ein linearer Zusammenhang auf* $\xi$ *ist eine Abbildung* $\nabla : \Xi \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$, *sodass gilt:*

A. *Sei* $\nabla(h, s) = \nabla_h s$ *gesetzt: für festes* $s \in \Gamma(\xi)$ *ist die Abbildung* $h \to \nabla_h s$ *linear in der* $F_R$*-Modul-Struktur von* $\Xi$ *und* $\Gamma(\xi)$.

B. *Für alle* $h \in \Xi$, $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$, $\lambda \in F$, *gilt:*

$$\nabla_h(\lambda s_1 + s_2) = (h \lambda) s_1 + \lambda (\nabla_h s_1) + \nabla_h s_2 ,$$

*wobei* $h \lambda$ *die Ableitung der Funktion* $\lambda$ *in Richtung* $h$ *ist.*

**Definition 7.** *Ein linearer Zusammenhang auf einem Algebrabündel* $\eta$ *ist ein linearer Zusammenhang gemäss Definition 6, mit der zusätzlichen Eigenschaft*

C. $\nabla_h(s_1 s_2) = (\nabla_h s_1) s_2 + s_1 (\nabla_h s_2)$ *für alle* $h \in \Xi$, $s_1, s_2 \in \Gamma(\eta)$ ($s_1 s_2 =$ *Produkt in* $\Gamma(\eta)$ ).

*Beispiel.* Sei $\xi$ ein Vektorbündel, $\eta = \varepsilon(\xi)$ das Homomorphismenbündel von $\xi$, und $\nabla$ auf $\xi$. Für $t \in \Gamma(\varepsilon(\xi))$ definiert man $\tilde{\nabla}_h t$ durch Operation auf $s \in \Gamma(\xi)$ als

$$(\tilde{\nabla}_h t) s = \nabla_h(t s) - t (\nabla_h s) .$$

Man verifiziert A, B und C für $\tilde{\nabla}$ und sagt, $\tilde{\nabla}$ sei *von* $\nabla$ *induziert.*

**Theorem 2.** *Jeder lineare Zusammenhang auf dem Homomorphismenbündel* $\varepsilon(\xi)$ *eines Vektorbündels* $\xi$ *ist von einem solchen auf* $\xi$ *induziert.*

*Bemerkung.* Zwei lineare Zusammenhänge $\nabla$ und $\nabla'$ auf $\xi$, welche dasselbe $\tilde{\nabla}$ auf $\varepsilon(\xi)$ induzieren, unterscheiden sich um eine reell- bezw. komplexwertige 1-Form $\omega$ auf $M$. Denn es gilt für $d_h = \nabla'_h - \nabla_h$:

$$d_h t - t d_h = 0 \quad \text{für alle} \quad h \in \Xi, \; t \in \Gamma(\varepsilon(\xi)) ,$$

somit

$$d_h = (\omega h) 1 \quad ( 1 = \text{1-Schnitt in } \varepsilon(\xi) ) .$$

Es sei nun weiter $\tilde{\beta}$ ein metrisches Feld auf dem Vektorbündel $\xi$.

**Definition 8.** *Ein linearer Zusammenhang* $\nabla$ *auf* $\xi$ *heisst zulässig in* $(\xi, \tilde{\beta})$, *falls* $h(\tilde{\beta}(s_1, s_2)) = \tilde{\beta}(\nabla_h s_1, s_2) + \tilde{\beta}(s_1, \nabla_h s_2)$ *für alle* $h \in \Xi$ *und* $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$ *ist.*

**Theorem 3.** *Sei* $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ *das Clifford-Bündel von* $(\xi, \tilde{\beta})$, *und* $\bigtriangledown$ *zulässig in* $(\xi, \tilde{\beta})$. *Dann gibt es genau einen linearen Zusammenhang* $\tilde{\bigtriangledown}$ *auf* $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$, *welcher* $\bigtriangledown$ *erweitert.*

Die Eindeutigkeit einer solchen Erweiterung $\tilde{\bigtriangledown}$ beruht auf der Derivationsregel C für $\tilde{\bigtriangledown}$ und der jeder Faser $\xi_x$ von $\xi$ zukommenden Eigenschaft, die Algebra $\gamma_x$ zu erzeugen (vergleiche (4.1) und (2.1)). Der Existenzbeweis von $\tilde{\bigtriangledown}$ benützt die lokale Produktstruktur der Bündel und einen Erweiterungssatz für Derivationen in Clifford-Algebren.

7. *Dirac-Operator.* In § 5 ist das »Spinorbündel von $(\xi, \tilde{\beta})$« eingeführt worden, und zwar als ein komplexes Vektorbündel $\sigma$, dessen Homomorphismenbündel $\varepsilon(\sigma)$ isomorph dem Clifford-Bündel $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ ist (dieser Begriff ist nur sinnvoll, falls $\xi$ selbst ein komplexes Vektorbündel von gerader Dimension ist). Es sei $\Phi : \gamma(\xi, \tilde{\beta}) \to \varepsilon(\sigma)$ dieser Isomorphismus.

**Definition 9.** *Das Paar* $(\sigma, \Phi)$ *definiert eine SC-Struktur auf* $(\xi, \tilde{\beta})$. *Ist insbesondere* $\xi$ *das komplexifizierte Kotangentenbündel* $\tau_c^*$ *der Mannigfaltigkeit* $M$, *dann ist* $(\sigma, \Phi)$ *eine SC-Struktur der Riemannschen Mannigfaltigkeit* $(M, \tilde{\beta})$.

Falls nun $\bigtriangledown$ ein zulässiger linearer Zusammenhang in $(\xi, \tilde{\beta})$ ist (Definition 8), dann lässt sich dieser zu einem linearen Zusammenhang $\tilde{\bigtriangledown}$ auf $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ erweitern (Theorem 3).

Mittels $\Phi$ wird $\tilde{\bigtriangledown}$ in einen linearen Zusammenhang $\Phi_* \tilde{\bigtriangledown}$ auf $\varepsilon(\sigma)$ übertragen, welcher andererseits von einem linearen Zusammenhang $\bigtriangledown'$ auf $\sigma$ induziert wird (Theorem 2).

**Definition 10.** *Es sei* $(M, \tilde{\beta})$ *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (von gerader Dimension),* $\bigtriangledown$ *der Levi-Civita-Zusammenhang von* $(M, \tilde{\beta})$ [7], *sowie* $\tilde{\bigtriangledown}$ *dessen Erweiterung auf* $\gamma(M, \tilde{\beta})$. *In einer SC-Struktur* $(\sigma, \Phi)$ *von* $(M, \tilde{\beta})$ *heisst dann ein linearer Zusammenhang* $\bigtriangledown'$ *auf* $\sigma$ *zulässig, falls er* $\Phi_* \tilde{\bigtriangledown}$ *induziert.*

Nach der Bemerkung von § 6 ist die Menge der in derselben SC-Struktur $(\sigma, \Phi)$ zulässigen linearen Zusammenhänge auf $\sigma$ nach Wahl eines »Bezugspunktes« $\bigtriangledown_0'$ gleich der Menge aller komplexwertigen 1-Formen auf $M$.

Wir wollen die Beziehungen, die bei der Definition 10 eine Rolle spielen, in einer expliziten Gleichung zum Ausdruck bringen. Sei $\varphi$ die Restriktion von $\Phi$ auf das reelle Kotangentenbündel $\tau^*$ von $M$ (siehe Lemma 6); dann gilt das

---

[7]) $\bigtriangledown$ wird als linearer Zusammenhang auf $\tau_c^*$ interpretiert; $\bigtriangledown$ ist zulässig in $(\tau_c^*, \tilde{\beta}_c^*)$ und hat Torsion Null.

**Lemma 8.** *$\nabla'$ auf $\sigma$ ist in $(\sigma, \Phi)$ dann und nur dann zulässig, wenn*

$$\nabla'_h((\varphi h^*)\psi) = \varphi(\nabla_h h^*)\psi + (\varphi h^*)\nabla'_h\psi$$

*für alle $h \in \Xi$, $h^* \in \Xi^*$, $\psi \in \Gamma(\sigma)$ gilt.*

Sei nun $\nabla'$ auf $\sigma$ in $(\sigma, \Phi)$ zulässig. Für festes $\psi \in \Gamma(\sigma)$ ist

$$t_\psi(h^*, h) = (\varphi h^*)\nabla'_h\psi$$

ein gemischter Tensor zweiter Stufe auf $M$ mit Werten in $\sigma$. Dessen Kontraktion über das Argumentenpaar $(h^*, h)$ liefert einen Schnitt $D\psi \in \Gamma(\sigma)$, welcher lokal in der Form

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} t_\psi(h^{*i}, h_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \nabla'_i \psi, \quad n = \dim M,$$

dargestellt werden kann. Dabei bedeutet $\{h_i\}$ ein lokales tangentielles $n$-Bein-Feld auf $M$, $\{h^{*i}\}$ das dazu Duale, und es ist $\varphi^i = \varphi h^{*i}$, $\nabla'_i = \nabla'_{h_i}$ gesetzt.

**Definition 11.** *$D: \Gamma(\sigma) \to \Gamma(\sigma)$ ist der Dirac-Operator bezüglich $\nabla'$.*

Man erkennt übrigens in der Form

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \nabla'_i \psi$$

wieder den in der Einleitung gegebenen Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}.$$

Die $\varphi^i$ sind lokale Schnitte im Homomorphismenbündel von $\sigma$ und genügen wegen Lemma 6 den Vertauschungsrelationen

$$\varphi^i \varphi^k + \varphi^k \varphi^i = 2\beta^{ik} 1,$$

wo $\beta^{ik} = \tilde{\beta}^*(h^{*i}, h^{*k})$ gesetzt ist. Diese Relation entspricht wieder der in der Fussnote[1]) für die Dirac-Matrizen $\gamma^j$ gegebenen.

8. *Dirac-Operator in der Zerlegung* $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \tilde{\beta})$ sei orientierbar, mit einer ausgezeichneten Orientierung $\Omega$, $(\sigma, \Phi)$ sei eine SC-Struktur auf $(M, \tilde{\beta})$, und $\nabla'$ ein in $(\sigma, \Phi)$ zulässiger linearer Zusammenhang auf $\sigma$. Wir wollen zeigen, dass der zugehörige Dirac-Operator $D$ die folgende Eigenschaft hat:

**Theorem 4.** *Sei $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ die in Theorem 1 gegebene Zerlegung. Dann ist $D: \Gamma(\sigma_1) \to \Gamma(\sigma_2)$ und $D: \Gamma(\sigma_2) \to \Gamma(\sigma_1)$.*

Ist nämlich $c_\Omega \in \Gamma(\gamma(M, \tilde{\beta}))$ der durch Lemma 7 gegebene Schnitt, dann sind ja $\sigma_1$ und $\sigma_2$ als die »Eigenräume» von $\Phi c_\Omega$ definiert. Nun gilt:

**Lemma 9.** $\tilde{\nabla}_h c_\Omega = 0$ *für alle* $h \in \Xi$, *wo* $\tilde{\nabla}$ *der auf* $\gamma(M, \tilde{\beta})$ *erweiterte Levi-Civita-Zusammenhang ist.*

*Beweis des Lemmas.* Aus $h^* c_\Omega = - c_\Omega h^*$, $h^* \in \Xi^*$ (siehe Lemma 7) und der Derivationseigenschaft C (§ 6) folgt

$$(\tilde{\nabla}_h h^*) c_\Omega + h^*(\tilde{\nabla}_h c_\Omega) = - (\tilde{\nabla}_h c_\Omega) h^* - c_\Omega (\tilde{\nabla}_h h^*) ,$$

und weiter wegen $\tilde{\nabla}_h h^* = \nabla_h h^* \in \Xi^*$ und Lemma 7:

$$h^*(\tilde{\nabla}_h c_\Omega) = - (\tilde{\nabla}_h c_\Omega) h^*,$$

also

$$\tilde{\nabla}_h c_\Omega = (\omega h) c_\Omega, \qquad \omega h \in F_C .$$

Aus $(c_\Omega)^2 = (-1)^m$ folgt zudem

$$(\tilde{\nabla}_h c_\Omega) c_\Omega = 0 ,$$

also $\omega h = 0$ und $\tilde{\nabla}_h c_\Omega = 0$.

**Lemma 10.** *Ein in* $(\sigma, \Phi)$ *zulässiges* $\nabla'$ *auf* $\sigma$ *lässt die Zerlegung* $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ *invariant.*

*Beweis des Lemmas.* Sei etwa $m = (\dim M)/2$ gerade. Dann ist $\psi \in \Gamma(\sigma_1)$ durch $(\Phi c_\Omega)\psi = \psi$, $\psi \in \Gamma(\sigma_2)$ durch $(\Phi c_\Omega)\psi = -\psi$ charakterisiert. Per definitionem ist $\nabla'$ zulässig genau dann, wenn der von ihm auf $\varepsilon(\sigma)$ induzierte lineare Zusammenhang $\tilde{\nabla}'$ mit $(\Phi_* \tilde{\nabla})$ übereinstimmt. Da nun $\tilde{\nabla}_h c_\Omega = 0$ ist, folgt $\tilde{\nabla}'_h(\Phi c_\Omega) = 0$, also folgt aus der Gleichung $(\Phi c_\Omega)\psi = \psi$ für $\psi \in \Gamma(\sigma_1)$ die Gleichung $(\Phi c_\Omega)(\nabla'_h \psi) = \nabla'_h \psi$, und somit $\nabla'_h \psi \in \Gamma(\sigma_1)$.

*Beweis des Theorems.* $D\psi$ ist die Kontraktion über $(h^*, h)$ des Ausdrucks $(\varphi h^*)\nabla'_h \psi$, wo $\varphi$ die Restriktion von $\Phi$ auf $\Xi^*$ ist. Ist etwa $\psi \in \Gamma(\sigma_1)$, dann ist $\nabla'_h \psi \in \Gamma(\sigma_1)$, $\Phi h^*$ aber vertauscht $\Gamma(\sigma_1)$ und $\Gamma(\sigma_2)$ wegen $h^* c_\Omega = - c_\Omega h^*$.

9. *Existenz des Spinorbündels.* Es soll gezeigt werden, dass man zu jedem gegebenen Paar $(\xi, \tilde{\beta})$ von geradedimensionalem komplexem Vektorbündel über der Basis $M$ und metrischem Feld $\tilde{\beta}$ auf $\xi$ ein Element $s(\xi, \tilde{\beta}) \in H^3(M, Z)$ zuordnen kann, derart dass $s(\xi, \tilde{\beta}) = 0$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines zu $(\xi, \tilde{\beta})$ gehörenden Spinorbündels — mit anderen Worten: für die Existenz einer SC-Struktur auf $(\xi, \tilde{\beta})$ — ist, und dass $s(\xi, \tilde{\beta})$ nicht von der gewählten Metrik $\tilde{\beta}$ auf $\xi$ abhängt. Insbesondere kann man der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ ein Element $s(M) \in H^3(M, Z)$ zuordnen (definiert als $s(M) = s(\tau_c^*, \tilde{\beta}_c^*)$ für irgendeine Metrik $\tilde{\beta}$ auf $M$), welche für die Existenz von Spinoren

auf $M$ verantwortlich ist. Wir möchten noch darauf aufmerksam machen, dass die feste Basismannigfaltigkeit $M$ der betrachteten Vektorbündel wie bisher wesentlich als parakompakt vorausgesetzt wird.

Gemäss Lemma 3 (§ 2) und Definition 4 (§ 5) lässt sich das Existenzproblem von Spinoren auf folgende Frage reduzieren: Wann ist ein komplexes Algebrabündel $\eta$ mit einfacher Faser $A$ isomorph dem Homomorphismenbündel eines komplexen Vektorbündels $\sigma$ ?

Es sei nun $\eta$ ein komplexes Algebrabündel mit einfacher Faser $A$. Wir interpretieren $A$ als die Endomorphismenalgebra eines komplexen Vektorraumes $S$. Es gilt dann:

$$\dim S = m\,, \qquad \dim A = m^2\,;$$

$m$ sei im Folgenden fest. Jeder Automorphismus $h$ von $A$ ist nach dem Satz von Nöther—Skolem ein innerer Automorphismus, d. h. es existiert $g \in \boldsymbol{G}$ (= volle lineare Gruppe von $S$), sodass

$$h(a) = g\,a\,g^{-1} \qquad \text{für alle } a \in A$$

ist. Ist $\boldsymbol{H}$ die Automorphismengruppe von $A$, dann definiert die obige Gleichung einen Homomorphismus $\pi : \boldsymbol{G} \xrightarrow{\text{auf}} \boldsymbol{H}$, dessen Kern aus den Elementen $\lambda^* 1$ ($\lambda^*$ = von Null verschiedene komplexe Zahl), d. h. aus der multiplikativen Gruppe $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} - (0)$ besteht. Man erhält somit die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \boldsymbol{C}^* \to \boldsymbol{G} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{H} \to 0\,.$$

Sind nun $\mathcal{C}^*, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ die Garben der Keime lokaler differenzierbarer Funktionen auf $M$ mit Werten in $\boldsymbol{C}^*$, bezw. $\boldsymbol{G}$, bezw. $\boldsymbol{H}$, dann erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{C}^* \to \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \to 0\,,$$

welche ihrerseits die exakte Sequenz für Kohomologiegruppen (bezw. -mengen).

$$H^1(M\,,\,\mathcal{C}^*) \to H^1(M\,,\,\mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} H^1(M\,,\,\mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} H^2(M\,,\,\mathcal{C}^*) \tag{9.1}$$

induziert [8]).

$H^1(M\,,\,\mathcal{H})$ ist die Menge aller Isomorphieklassen von komplexen Algebrabündeln mit einfacher Faser und Dimension $m^2$, $H^1(M\,,\,\mathcal{G})$ die Menge der Isomorphieklassen von komplexen Vektorbündeln der Dimension $m$ ([5], S. 40 ff.). Sei $\eta$ ein solches Algebrabündel, sowie $(\eta)$ dessen Iso-

[8]) Zur Definition von Kohomologiemengen mit Werten in einer Garbe und deren Beziehung zu Vektorbündeln, siehe [5]. Die exakte Sequenz steht in [3].

morphieklasse $\in H^1(M, \mathcal{H})$. $\eta$ ist isomorph dem Homomorphismenbündel eines Vektorbündels $\sigma$, heisst:

$$\pi(\sigma) = (\eta) .$$

Wegen der Exaktheit von (9.1) ist dies mit $\Delta(\eta) = 0$ gleichbedeutend. Man denkt sich noch in (9.1) $H^1(M, \mathcal{C}^*)$, $H^2(M, \mathcal{C}^*)$ durch die isomorphen Gruppen $H^2(M, Z)$ bezw. $H^3(M, Z)$ ersetzt ([5], § 3.6).

**Definition 12.** *Sei* $(\xi, \tilde{\beta})$ *ein komplexes Vektorbündel mit metrischem Feld* $\tilde{\beta}$, $\dim \xi = 2p$, $\eta = \gamma(\xi, \tilde{\beta})$ *das Clifford-Bündel. Man setze*

$$s(\xi, \tilde{\beta}) = \Delta(\eta) \in H^3(M, Z) .$$

Mit dieser Definition erhält man also das

**Lemma 11.** $s(\xi, \tilde{\beta}) = 0$ *genau dann, wenn* $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ *das Homomorphismenbündel eines Vektorbündels* $\sigma$ *ist.*

Man kann nun noch zeigen, was wir hier nicht tun wollen, dass für zwei metrische Felder $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\beta}'$ auf $\xi$ die Clifford-Bündel $\gamma(\xi, \tilde{\beta})$ und $\gamma(\xi, \tilde{\beta}')$ isomorph sind. Daraus folgt dann $s(\xi, \tilde{\beta}) = s(\xi, \tilde{\beta}')$.

10. *Eindeutigkeit des Spinorbündels.*

**Lemma 12.** $(\xi, \tilde{\beta})$ *sei wie in der Definition 12, und* $\sigma, \sigma'$ *seien zwei Spinorbündel von* $(\xi, \tilde{\beta})$. *Dann existiert ein komplexes Geradenbündel* $\mu$, *sodass* $\sigma' \approx \mu \otimes \sigma$. *Umgekehrt ist zu jedem komplexen Geradenbündel* $\mu$ *und Spinorbündel* $\sigma$ *von* $(\xi, \tilde{\beta})$, $\mu \otimes \sigma$ *wieder ein Spinorbündel von* $(\xi, \tilde{\beta})$.

Übersetzt man nämlich das Lemma in die Kohomologiesprache, so erhält man den in [3] ausgesprochenen Satz, wonach in der Sequenz (9.1) $H^1(M, \mathcal{C}^*)$ auf $H^1(M, \mathcal{G})$ operiert, und zwar so, dass die Transitivitätsklassen von $H^1(M, \mathcal{G})$ bezüglich dieser Operation gerade die Urbilder $\pi^{-1}(\eta)$, $(\eta) \in H^1(M, \mathcal{H})$ sind.

**Lemma 13.** *Zu* $(\xi, \tilde{\beta})$ *gibt es höchstens soviele Isomorphieklassen von Spinorbündeln, als es Elemente von* $H^2(M, Z)$ *gibt.*

11. Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit am Institut für Theoretische Kernphysik der Universität Bonn entstanden. Ich bin Herrn Professor Dr. K. Bleuler für die Einführung in diesen Gedankenkreis sowie überhaupt für seine Grosszügigkeit, welche die Zusammenarbeit mit dem benachbarten Mathematischen Institut ermöglichte, zu grossem Dank verpflichtet. Der Anfang dieser Arbeit datiert eigentlich schon in die Jahre 1957/58 zurück, als ich mich mit einem Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds bei Herrn Bleuler in Neuchâtel (Schweiz) befand; sie ist dann durch einen Amerika-Aufenthalt unterbrochen worden, und jetzt

wieder in einer durch die Bonner mathematische Atmosphäre geläuterten Form erstanden. Ich möchte aber nochmals auf den durchaus physikalischen Ursprung des Themas hinweisen, welches darin besteht, die Diracsche Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie anzupassen.

Es ist mir schliesslich eine angenehme Pflicht, der Fritz-Hoffmann-La-Roche-Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz für die Erleichterung der Arbeit durch Gewährung materieller Unterstützung zu danken.

Universität Bonn
Deutschland

## Literatur

[1] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. XXIV. Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Actualités Sci. Ind. 1272, Hermann, Paris, 1959.

[2] Chevalley, C.: The algebraic theory of spinors. - Columbia University Press, New York, 1954.

[3] Frenkel, J.: Cohomologie à valeurs dans un faisceau non abélien. - C. R. Acad. Sci. Paris 240, 1955, S. 2368—2370.

[4] Guy, R.: Sur la dérivation covariante des spineurs. - Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 24, 1958, S. 512—519.

[5] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Ergebnisse d. Mathematik. Neue Folge 5, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1956.

Gedruckt August 1963.