ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

376

ÜBER RATIONALE NÄHERUNGSWERTE ALGEBRAISCHER ZAHLEN

VON

SEPPO HYYRÖ

HELSINKI 1965
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1966.376

Am 10. September 1965 vorgelegt von P. J. MYRBERG und K. INKERI

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1965

Über rationale Näherungswerte algebraischer Zahlen

1. Einleitung. Wir [3] haben neulich bewiesen, dass man *alle* in gewissem Sinne »guten» Näherungsbrüche für eine *beliebige* irrationale Zahl ϑ eines gegebenen algebraischen Zahlkörpers K vom Grade $n \geqq 3$ durch endlich viele Schritte bestimmen kann, wenn es nur in K *eine* solche primitive Zahl ϱ gibt, für die *ein* hinreichend »guter» Näherungsbruch bekannt ist. In der vorliegenden Arbeit verschärfen wir einerseits das Ergebnis von [3], andrerseits das von GELFOND [2], S. 22, Th. 1.

Es seien $\varkappa$, λ und C gegebene positive Zahlen, wobei $\varkappa$ grösser als eine Schranke $\varkappa_0$ und λ grösser als eine von $\varkappa$ abhängige Schranke λ_0 ist. Es sei ϱ eine veränderliche primitive ganze Zahl in K und ϑ eine veränderliche irrationale Zahl in K. Weiter seien p, q $(q > 0)$ und u, v $(v > 0)$ veränderliche ganze rationale Zahlen. In [3] sind explizit eine von ϱ (und von $\varkappa, \lambda$) abhängige Funktion $g_0(\varrho)$ sowie eine von ϱ, q, ϑ (und von $\varkappa, \lambda, C$) abhängige Funktion $S(\varrho, q, \vartheta)$ definiert. Nach [3] ergibt sich leicht der folgende Satz, in dem das oben im ersten Abschnitt skizzierte Ergebnis enthalten ist:

Die Ungleichungen

$$|\varrho - p/q| < 1/q^{\varkappa}, \quad q > g_0(\varrho)\,,$$
$$|\vartheta - u/v| < C/v^{\lambda}, \quad v \geqq S(\varrho, q, \vartheta)$$

haben keine Lösung $\varrho, p, q, \vartheta, u, v$.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $(p, q) = 1$, $(u, v) = 1$ verbessern wir in dieser Arbeit das Resultat von [3]. Das genannte Ergebnis von GELFOND [2] ist allgemeiner als das von uns in dem Sinne, dass die Näherungswerte von ϱ und ϑ Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper K_1 sind, statt der rationalen p/q und u/v bei uns. In dem Falle, dass K_1 der Körper der rationalen Zahlen ist, verbessern wir das Resultat in [2]. In [2] ist die Funktion g_0 von ϑ abhängig; in [3] und in dieser Arbeit ist g_0 *von* ϑ *frei*, so dass wir ϑ beliebig wählen können, *nachdem* die Zahlen ϱ und q festgesetzt worden sind. In [3] ist $\varkappa_0 = n/2$; in [2] sowie in dieser Arbeit hat $\varkappa_0$ den besten möglichen Wert 2 (ist nämlich $\varkappa \leqq 2$, so gibt es für jedes ϱ unendlich viele Näherungsbrüche obengenannter Art). In [3] ist $\lambda_0 = 2\,\varkappa/(2\,\varkappa - n)$; in dieser Arbeit ist $\lambda_0 = 2\,n/\varkappa$. Die letztere Schranke λ_0 ist für $\varkappa < n$ besser als die erstere. Schon die erstere, also auch die letztere Schranke liegt beliebig nahe dem *besten möglichen* Wert 2, wenn $\varkappa$ hinreichend nahe n ist. In [2] muss λ grösser als $2\,n/\varkappa$ und mindestens gleich $\varkappa$, also grösser als $(2n)^{1/2}$ sein.

Unser Ergebnis ist unten in Nr. 2 exakt ausgesprochen. (Es sei bemerkt, dass die dort auftretenden Funktionen g und G etwas anders sind als die obengenannten entsprechenden Funktionen g_0 und S von [3].) Der Beweis stützt sich auf Eigenschaften gewisser Polynome zweier Veränderlichen ähnlich wie z.B. bei Gelfond [2], Dyson [1] und Schneider [4]. Unser früherer Beweis [3], in dem nur Polynome einer Veränderlichen zur Anwendung kommen, ist einfacher als der vorliegende Beweis oder der von Gelfond [2].

Es sei noch auf die Einleitung von [3] hingewiesen, wo weitere Diskussion über das betreffende Problem sich findet.

2. Hauptsatz und Bezeichnungen. Als Resultat unserer Betrachtungen ergibt sich der folgende

Hauptsatz. *Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n \geqq 3$. Es seien $\varkappa, \lambda, \varepsilon$ und C reelle Zahlen mit $2 < \varkappa \leqq n$, $2 < \lambda \leqq n$, $\varepsilon > 0$, $C > 0$, wobei die Bedingung*

$$\varkappa\lambda = 2n + \varepsilon$$

erfüllt ist. Ferner sei ϱ eine primitive ganze Zahl in K und ϑ eine irrationale Zahl in K. Es seien p, q, u, v ganze rationale Zahlen mit $(p, q) = 1$, $(u, v) = 1$. Die von ϱ (und $\varkappa, \lambda$) abhängige Funktion g sei wie in (3) *und die von ϱ, q, ϑ (und $\varkappa, \lambda, C$) abhängige Funktion G wie in* (4) *definiert. Dann können die Ungleichungen*

$$|\varrho - p/q| < 1/q^{\varkappa}, \quad q > g(\varrho)\,, \tag{1}$$

$$|\vartheta - u/v| < C/v^{\lambda}, \quad v \geqq G(\varrho, q, \vartheta) \tag{2}$$

nicht gleichzeitig bestehen.

Nun setzen wir die Bezeichnungen fest. Es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

das kanonische Polynom für ϱ, wobei

$$a = \max\,(|a_1|\,, \ldots, |a_n|\,)$$

gesetzt ist. Wir wählen eine Hilfsgrösse δ unter der Bedingung

$$0 < \delta < \varepsilon/2, \quad \delta \leqq n\,.$$

Weiter werde

$$\mu = 2\,(\varkappa^2 - \varkappa + n + \delta)/\varkappa(\varepsilon - 2\,\delta)\,,$$
$$s = [(\varkappa\lambda\mu - \varkappa)/2]\,,$$
$$\alpha = \varkappa\lambda\mu - \varkappa - s\,,$$

(3) $$g = \max\,(4^{s+1}(2a+2)^{n(s+1)/\delta},\ 8(a+2)\,(2a+2)^{n/\delta})^{\alpha}$$

(also $g = \max\,(C_7, C_{10})$, s. unten) gesetzt. (Man sieht leicht, dass $\lambda\mu > 2$ und also $s \geqq 1$ ist.)

Es sei T_1 die kleinste natürliche Zahl derart, dass die Zahl $T_1\vartheta$ ganz ist. (T_1 ist nicht grösser als die Höhe von ϑ.) Dann gibt es bei $2 \leqq \nu \leqq n$ ein solches Polynom

$$f_1(x) = x^{\nu} + h_1x^{\nu-1} + \cdots + h_{\nu}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, dass $f_1(T_1\vartheta)$ gleich Null ist. Wir setzen

$$t_1 = \max\,(\,|h_1|\,,\ldots,\,|h_{\nu}|\,)\,.$$

Ferner setzen wir

$$\begin{aligned}
C_1 &= n!^2(a+1)^{n(n-1)}\,T_1\,,\\
C_2 &= n!^{2\nu}(a+1)^{\nu n(n-1)}\,t_1\,,\\
C_3 &= n!C_2(a+1)^{n(n-1)/2}\,,\\
C_4 &= (2C_3(2a+2)^{n-1})^{ns/\delta}\,,\\
C_5 &= (2a+2)^{n/\delta}\,,\\
C_6 &= (s+1)!C_4^{\,s+1}\,,\\
C_7 &= (4C_5)^{\alpha(s+1)}\,,\\
C_8 &= C_5^{\,\alpha(s+1)}\,,\\
C_9 &= (s+1)C_4(2C_2+2)^s q^{\varkappa s}\max\,(1, CC_1)^s\,,\\
C_{10} &= (8C_5(a+2)\,)^{\alpha}\,,\\
C_{11} &= [\log\,(C_6/q)/\log\,(q/C_7)] + 1\,,\\
C_{12} &= [\log\,(C_1C_6)/\log\,(q/C_8)] + 1\,,\\
C_{13} &= [\log C_9/\log\,(q/C_{10})] + 1\,,\\
C_{14} &= [(\varkappa\,\mu + 1)\,(n+\delta)/(2\alpha(s+1) - \lambda\mu(\varkappa\mu+1)\,(n+\delta))] + 1\,,
\end{aligned}$$

(4) $$\log G = \max\,(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})\log q\,.$$

Damit sind die beiden Funktionen g und G definiert worden.

3. Vorbereitungen und Hilfssätze. Der Beweis unseres Hauptsatzes ist indirekt. Dafür sei vorausgesetzt, dass die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind.

Wir definieren noch einige Hilfsgrössen, die im Beweise angewendet werden. Wir setzen $T = T_1 T_2$ mit der kleinsten natürlichen Zahl T_2 derart, dass die Koeffizienten $d_1, \ldots, d_n$ in dem Ausdruck

$$T\vartheta = f_0(\varrho), \quad f_0(x) = d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} + \cdots + d_n$$

ganze rationale Zahlen sind. Bei diesem T bezeichnen wir

$$\Theta = T\vartheta, \quad w = Tu,$$
$$d = \max(|d_1|, \ldots, |d_n|).$$

Die ganze Zahl Θ ist eine Nullstelle des Polynoms

$$f_2(x) = T_2^{\nu} f_1(x/T_2) = x^{\nu} + H_1 x^{\nu-1} + \cdots + H_{\nu},$$

wobei

$$t_2 = \max(|H_1|, \ldots, |H_{\nu}|)$$

gesetzt sei.

Weiter setzen wir

$$\sigma = [\log v / \log q],$$
$$r = [\sigma \alpha].$$

(Aus $v > q^{\varkappa s}$, $\alpha \geqq s$ folgt, dass σ und r natürliche Zahlen sind.)

In unserem Beweis brauchen wir den bekannten

Hilfssatz 1. *Es seien l, m natürliche Zahlen mit $l < m$ und b_{ij} $(i = 1, \ldots, l; j = 1, \ldots, m)$ ganze rationale Zahlen mit*

$$|b_{i1}| + |b_{i2}| + \cdots + |b_{im}| \leqq B \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

wobei B eine natürliche Zahl $\geqq 2$ ist. Dann ist das Gleichungssystem

$$b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \cdots + b_{im} x_m = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

lösbar in nicht sämtlich verschwindenden ganzen rationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_m$, die absolut genommen kleiner als

$$B^{l/(m-l)} + 1$$

sind.

Beweis. Anfangs laufen die Zahlen x_j die Werte $0, \pm 1, \ldots, \pm N$ durch, wobei N die natürliche Zahl mit

$$B^{l/(m-l)} \leqq 2N + 1 < B^{l/(m-l)} + 2$$

ist. Man sieht jetzt mittels des Schubfachschlusses, mit Rücksicht auf

$$(2BN+1)^l < B^l(2N+1)^l \leqq (2N+1)^m,$$

dass es eine Lösung mit $|x_j| \leqq 2N$ gibt. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Es gilt*

$$T < C_1, \quad t_2 < C_2, \quad d < C_3 .$$

Beweis. Wie in [3], Hilfssatz 1, können wir durch Betrachtung des Gleichungssystems $f_0(\varrho_i) = \Theta_i$, wobei $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die Nullstellen von $f(x)$ sind und die Ungleichungen $|\varrho_i| < a+1$ und $|\Theta_i| < t_2 + 1$ bestehen, die Richtigkeit der Abschätzungen

$$T_2 < C_1/T_1, \quad t_2 \leqq T_2^{\,\nu} t_1 < C_2, \quad d < (C_3/C_2)\,(t_2+1) \leqq C_3$$

beweisen. Also gilt Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3. *Es seien die Werte von* i *und* j *ganze rationale Zahlen* $\geqq 0$ *mit der Bedingung*

$$i/\sigma\lambda + j/\varkappa < \mu .$$

Dann ist die Anzahl der Gitterpunkte (i, j) *kleiner als*

$$(r+1)\,(s+1)/(n+\delta) .$$

Beweis. Für die genannte Anzahl ergibt sich leicht die obere Schranke

$$(\sigma\lambda\mu + 1)\,(\varkappa\mu + 1)/2 .$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Zahl

$$Z_1 = 2(r+1)\,(s+1) - (\sigma\lambda\mu+1)\,(\varkappa\mu+1)\,(n+\delta)$$

positiv ist. Nach der Definition von r gilt die Abschätzung

$$Z_1 > \sigma(2\alpha(s+1) - \lambda\mu(\varkappa\mu+1)\,(n+\delta)\,) - (\varkappa\mu+1)\,(n+\delta) .$$

Daraus folgt wegen $\sigma \geqq C_{14}$, dass Z_1 positiv ist, wenn nur die Zahl

$$\begin{aligned} Z_2 &= 4(\alpha+s+1)\,(s+1) - 4(s+1)^2 - 2\lambda\mu(\varkappa\mu+1)\,(n+\delta) \\ &= -\,(2\,(s+1) - (\varkappa\lambda\mu - \varkappa + 1))^2 + (\varkappa-1)^2 \end{aligned}$$

grösser als Null ist. Da $\varkappa > 2$ und

$$|(s+1) - (\varkappa\lambda\mu - \varkappa + 1)/2| \leqq 1/2$$

ist, so ist Z_2, also auch Z_1 positiv. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

4. Näherungspolynom. Weitere Hilfssätze. Das Polynom

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} c_{ij} x^i y^j \tag{5}$$

hat eine zentrale Bedeutung in unserem Beweis. Nachdem Hilfssatz 5 bewiesen ist, sind die Koeffizienten c_{ij} auf solche Weise gewählt, dass die in Hilfssatz 5 gestellten Bedingungen erfüllt sind. Für ganze rationale $h\ (\geqq 0)$, $k(\geqq 0)$ setzen wir

$$P_{hk}(x, y) = \partial^{h+k} P(x, y) / h!\, k!\, \partial x^h \partial y^k\ ,$$
$$P_h(x, y) = P_{h0}(x, y)\ .$$

Hilfssatz 4. *Für ganze rationale* $h\ (\geqq 0)$, $k\ (\geqq 0)$ *kann* $P_{hk}(\varrho, \Theta)$ *in der Form*

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} E(h, k, m, i, j)\, c_{ij}\, \varrho^m$$

ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten $E(h, k, m, i, j)$ *ganze rationale Zahlen sind und für alle* h, k, m *der Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} |E(h, k, m, i, j)\ | < (2C_3)^s\, (2a + 2)^{r+(n-1)s}$$

genügen.

Beweis. Es seien i und j ganze rationale Zahlen mit $0 \leqq i \leqq r$, $0 \leqq j \leqq s$. Da

$$f_0(x) \ll d(x + 1)^{n-1}$$

ist, so ist

$$f_0(x)^j \ll d^j (x + 1)^{(n-1)j} \ll 2^{(n-1)j} d^j\, (x^{(n-1)j} + \cdots + x + 1)\ .$$

(Unsere Bezeichnung $U \ll V$ bedeutet, dass jeder Koeffizient des Polynoms U absolut genommen höchstens gleich dem entsprechenden Koeffizienten des Polynoms V ist, wobei V keine negativen Koeffizienten hat.) Daher können wir

$$\varrho^i\, \Theta^j = \varrho^i f_0(\varrho)^j = \sum_{m=0}^{i+(n-1)j} b_m\, \varrho^m$$

schreiben, worin die ganzen rationalen Koeffizienten b_m absolut genommen höchstens gleich $2^{(n-1)j} d^j$ sind. Ist $j \geqq 1$ oder $i \geqq n, j = 0$ und wird oben auf der rechten Seite der Reihe nach für $m = i + (n - 1)j$, $\ldots, n + 1, n$

$$\varrho^m = -a_1 \varrho^{m-1} - a_2 \varrho^{m-2} - \cdots - a_n \varrho^{m-n}$$

gesetzt, so ergibt sich, dass die Koeffizienten $e(i, j, m)$ in dem Ausdruck

$$\varrho^i \Theta^j = \sum_{m=0}^{n-1} e(i, j, m) \varrho^m$$

ganze rationale Zahlen und absolut genommen nicht grösser als

$$2^{(n-1)j} d^j (a+1)^{i+(n-1)(j-1)}$$

sind. Ist $i < n$, so ist $e(i, 0, m)$ für $i = m$ gleich 1 und sonst gleich Null.

Ohne Beschränkung können wir $h \leqq r$ und $k \leqq s$ annehmen. Nun besteht die Gleichung

$$P_{hk}(\varrho, \Theta) = \sum_{i=h}^{r} \sum_{j=k}^{s} \binom{i}{h} \binom{j}{k} c_{ij} \varrho^{i-h} \Theta^{j-k}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=h}^{r} \sum_{j=k}^{s} \binom{i}{h} \binom{j}{k} e(i-h, j-k, m) c_{ij} \varrho^m .$$

Hierin gilt wegen $(a+1)^{n-1} \geqq 4$ nach Hilfssatz 2 die Abschätzung

$$\sum_{i=h}^{r} \sum_{j=k}^{s} \binom{i}{h} \binom{j}{k} |e(i-h, j-k, m)|$$

$$< 2^r + (a+1)^{-(n-1)} \sum_{i=0}^{r} (2a+2)^i \sum_{j=0}^{s} (2d(2a+2)^{n-1})^j$$

$$< 2^r + (2a+2)^r (2d(2a+2)^{n-1})^s < (2C_3)^s (2a+2)^{r+(n-1)s} .$$

Hilfssatz 4 ist also richtig.

Hilfssatz 5. *Es gibt ein Polynom* (5), *das die folgenden Bedingungen erfüllt:*

Die Koeffizienten c_{ij} *sind ganze rationale, nicht sämtlich verschwindende Zahlen und absolut genommen kleiner als* $C_4 C_5^r$.

Es gilt

$$P_{hk}(\varrho, \Theta) = 0$$

für alle ganzen rationalen h, k *mit*

$$h/\sigma\lambda + k/\varkappa < \mu, \quad h \geqq 0, \quad k \geqq 0 . \tag{6}$$

Beweis. Damit die letztere Bedingung erfüllt ist, müssen die Koeffizienten c_{ij} nach Hilfssatz 4 der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} E(h, k, m, i, j) c_{ij} = 0$$

für alle ganzen rationalen h, k, m mit (6) und $0 \leqq m < n$ genügen. In diesem Gleichungssystem ist die Anzahl der Unbestimmten c_{ij} gleich $(r + 1)(s + 1)$ und die der Gleichungen nach Hilfssatz 3 kleiner als

$$(r + 1)(s + 1)n/(n + \delta) .$$

Wegen der Ungleichung des Hilfssatzes 4 ist Hilfssatz 1 mit

$$B = (2C_3)^s (2a + 2)^{r+(n-1)s} - 1$$

anwendbar. Weil

$$(n/(n + \delta))/(1 - n/(n + \delta)) = n/\delta$$

ist, so kann man die Koeffizienten c_{ij} auf solche Weise wählen, dass sie ganz rational, absolut genommen kleiner als $B^{n/\delta} + 1$, also wegen $n/\delta \geqq 1$ kleiner als

$$(B + 1)^{n/\delta} = C_4 C_5^r$$

und nicht alle gleich Null sind. Damit ist die Richtigkeit des Hilfssatzes 5 festgestellt.

Von nun an setzen wir voraus, dass das Polynom $P(x, y)$ die Bedingungen des Hilfssatzes 5 erfüllt.

Hilfssatz 6. *Es gibt eine solche natürliche Zahl* t, *höchstens gleich* $s + 1$, *und solche Polynome* $D(x)$, $R(y)$, $E_0(x), \ldots, E_{t-1}(x)$ *mit ganzen rationalen Koeffizienten, dass die Identität*

$$D(x)\, R(y) = \sum_{i=0}^{t-1} P_i(x, y)\, E_i(x)$$

besteht, wobei das Polynom $D(x)\, R(y)$ *nicht identisch verschwindet und die absoluten Beträge der Koeffizienten von* $D(x)$ *kleiner als* $C_6 C_7^{\sigma}$, *die von* $R(y)$ *kleiner als* $C_6 C_8^{\sigma}$ *sind.*

Beweis. Wir schreiben

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^{s} Q_j(x) y^j$$

mit

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{r} c_{ij} x^i \qquad (j = 0, \ldots, s) .$$

Es sei t die höchste Anzahl linear unabhängiger unter den Polynomen $Q_j(x)$. Also ist t höchstens gleich $s + 1$ und, weil $P(x, y)$ nicht identisch verschwindet, grösser als Null. Es sei

$$U_k(x) = \sum_{i=0}^{r} a_{ik}\, x \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

ein System von t linear unabhängigen unter den genannten Polynomen. Die Koeffizienten a_{ik} finden sich also unter den Zahlen c_{ij}. Weiter ist

$$Q_j(x) = \sum_{k=1}^{t} u_{jk}\, U_k(x) \qquad (j = 0, \ldots, s)$$

mit rationalen u_{jk}. Da der Rang der Matrix

$$(a_{ik}) \qquad (i = 0, \ldots, r\,; k = 1, \ldots, t)$$

gleich t ist, so hat sie eine von Null verschiedene Unterdeterminante, sagen wir A, $t$ten Grades. Aus dem Gleichungssystem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} u_{jk}\, a_{ik} \qquad (i = 0, \ldots, r\,; j = 0, \ldots, s)$$

ergibt sich

$$u_{jk} = A_{jk}/A \qquad (j = 0, \ldots, s\,; k = 1, \ldots, t), \tag{7}$$

wobei alle Elemente der Determinanten A_{jk}, $t$ter Ordnung, Koeffizienten von $P(x, y)$ sind.

Wir setzen nun

$$R_k(y) = \sum_{j=0}^{s} u_{jk}\, y^j \qquad (k = 1, \ldots, t).$$

Dann ist

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{t} U_k(x)\, R_k(y)\,.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Polynome $U_1(x), \ldots, U_t(x)$ folgt, dass kein Polynom $R_k(y)$ identisch verschwindet, und bekanntlich auch, dass die WRONSKIsche Determinante

$$D(x) = |U_k^{(i)}(x)/i!| \qquad (i = 0, \ldots, t-1\,; k = 1, \ldots, t)$$

nicht identisch Null ist. Hierin seien $D_0(x), \ldots, D_{t-1}(x)$ die Unterdeterminanten der ersten Spalte, so dass die Summe

$$\sum_{i=0}^{t-1} U_k^{(i)}(x) D_i(x)/i!$$

für $k = 1$ gleich $D(x)$ ist und für $k = 2, \ldots, t$ verschwindet. Jetzt besteht die Identität

$$D(x)R_1(y) = \sum_{i=0}^{t-1} P_i(x, y)D_i(x) ,$$

also die Identität des Hilfssatzes mit

$$R(y) = AR_1(y), \quad E_0(x) = AD_0(x) , \ldots , E_{t-1}(x) = AD_{t-1}(x) .$$

Für jedes i und k gilt nach Hilfssatz 5, bei einem $Z_3 < C_4 C_5^{\,r}$,

$$U_k^{(i)}(x)/i! \ll Z_3 \binom{r}{i} (x+1)^{r-i} \ll Z_3 2^r (x+1)^r ,$$

also

$$D(x) \ll (s+1)!\, Z_3^{\,s+1}\, 2^{r(s+1)} (x+1)^{r(s+1)}$$

$$\ll (s+1)!\, Z_3^{\,s+1}\, 4^{r(s+1)} (x^{r(s+1)} + \cdots + x + 1) .$$

Die Koeffizienten von $D(x)$ sind folglich absolut genommen kleiner als

$$(s+1)!\, C_4^{\,s+1} (4^{s+1} C_5^{\,s+1})^r \leqq C_6 C_7^{\,\sigma} .$$

Die absoluten Beträge der Koeffizienten von $R(y)$ sind nach (7) kleiner als

$$(s+1)!\, (C_4 C_5^{\,r})^{s+1} \leqq C_6 C_8^{\,\sigma} .$$

Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

Hilfssatz 7. *Unter den Zahlen*

$$0, 1, \ldots , \sigma + s$$

gibt es eine solche Zahl τ, *dass die Ungleichung*

$$P_\tau(p/q, w/v) \neq 0$$

besteht.

Beweis. Verschwindet das Polynom $R(y)$ des Hilfssatzes 6 in $y = w/v$, so ist der Koeffizient der höchsten Potenz in $R(y)$, das ja nicht identisch Null ist, durch die Zahl $v_0 = v/(w, v)$ teilbar. Der genannte Koeffizient ist also nicht absolut genommen kleiner als v_0. Dies ist jedoch unmöglich, weil wegen $\sigma \geqq C_{12}, q(> C_7) > C_8, (u, v) = 1$ nach Hilfssatz 2 die Ungleichung

$$v_0 > v/C_1 > C_6 C_8^{\,\sigma}$$

besteht. Folglich ist

$$R(w/v) \neq 0 . \tag{8}$$

Es sei $D(x)$ das in Hilfssatz 6 definierte nicht identisch verschwindende Polynom. Verschwinden die Ableitungen $D^{(i)}(x)$ in $x = p/q$ für alle

Werte $0, \ldots, \sigma$ von i, so ist $D(x)$ durch das Polynom $(qx - p)^{\sigma+1}$ teilbar. Daher ist wegen $(p, q) = 1$ der höchste Koeffizient von $D(x)$ absolut genommen mindestens gleich $q^{\sigma+1}$. Dies ist ein Widerspruch, denn es ist $\sigma \geqq C_{11}, q > C_7$, also $q^{\sigma+1} > C_6 C_7^{\sigma}$. Folglich gibt es eine ganze rationale Zahl β derart, dass

$$D^{(\beta)}(p/q) \neq 0, \quad 0 \leqq \beta \leqq \sigma \tag{9}$$

ist.

Aus der Identität des Hilfssatzes 6 folgt nach den Ungleichungen (8) und (9), dass es eine ganze rationale Zahl τ ($\geqq 0$) gibt, für die die Ungleichung des Hilfssatzes besteht und die höchstens gleich $\beta + t - 1$, also höchstens gleich $\sigma + s$ ist. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Hilfssatz 8. *Es sei* τ *eine ganze rationale Zahl* $\geqq 0$. *Dann besteht die Ungleichung*

$$|P_\tau(p/q, w/v)| < C_9 C_{10}^{\sigma} q^{\varkappa(\tau - s - \sigma\lambda\mu)} .$$

Beweis. Nach Hilfssatz 5 ist

$$P(x, y) \ll C_4 C_5^r (x + 1)^r (y + 1)^s ,$$

also, für $i = 0, \ldots, r$ und $j = 0, \ldots, s$,

$$P_{ij}(x, y) \ll C_4 C_5^r \binom{r}{i} \binom{s}{j} (x + 1)^{r-i} (y + 1)^{s-j}$$

$$\ll C_4 C_5^r 2^{r+s} (x + 1)^r (y + 1)^s .$$

Da ferner der absolute Betrag von ϱ kleiner als $a + 1$ und der von Θ kleiner als $t_2 + 1$, also nach Hilfssatz 2 kleiner als C_2 ist, so gilt die Abschätzung

$$|P_{ij}(\varrho, \Theta)| \leqq C_4 C_5^r 2^{r+s} (|\varrho| + 1)^r (|\Theta| + 1)^s < Z_4$$

mit

$$Z_4 = C_4 C_5^r (2a + 4)^r (2C_2 + 2)^s .$$

Aus der Identität

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} P_{ij} (\varrho, \Theta) (x - \varrho)^i (y - \Theta)^j$$

folgt, angenommen $\tau \leqq r$, der Ausdruck

$$P_\tau(p/q, w/v) = \sum_{i=\tau}^{r} \sum_{j=0}^{s} P_{ij} (\varrho, \Theta) \binom{i}{\tau} (p/q - \varrho)^{i-\tau} (w/v - \Theta)^j .$$

Hierin können nur die Glieder mit

$$i/\sigma\lambda + j/\varkappa \geqq \mu \tag{10}$$

von Null verschieden sein. Aus den Voraussetzungen (1) und (2) ergibt sich also nach Hilfssatz 2 die Abschätzung

$$|P_\tau(p/q, w/v)| < (r+1)(s+1) Z_4 2^r \max(1, CC_1)^s Z_5 \leqq q^{-\varkappa s} C_9 C_{10}{}^\sigma Z_5$$

mit

$$Z_5 = \max_{(10)} (q^{-\varkappa(i-\tau)} v^{-\lambda j}) .$$

Da ferner für alle i, j mit (10) und $i \geqq 0, j \geqq 0$ die Ungleichung

$$q^{-\varkappa i} v^{-\lambda j} \leqq q^{-\sigma\varkappa\lambda(i/\sigma\lambda + j/\varkappa)} \leqq q^{-\sigma\varkappa\lambda\mu}$$

besteht, so ist Hilfssatz 8 richtig.

5. Schluss des Beweises. Nun habe τ die Eigenschaft des Hilfssatzes 7. Mittels Hilfssatz 8 können wir den absoluten Betrag der ganzen rationalen Zahl

$$Z_6 = q^{r-\tau} v^s P_\tau(p/q, w/v)$$

abschätzen. Es gilt

$$|Z_6| < C_9 C_{10}{}^\sigma q^{\varkappa(\tau - s - \sigma\lambda\mu) + r - \tau + (\sigma+1)s} .$$

Dabei ist der Exponent von q höchstens gleich

$$(\varkappa - 1)(\sigma + s) - \varkappa(s + \sigma\lambda\mu) + \sigma\alpha + (\sigma+1)s = -\sigma .$$

Weiter ist $\sigma \geqq C_{13}, q > C_{10}$, also

$$C_9 C_{10}{}^\sigma < q^\sigma .$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$|Z_6| < 1 .$$

Folglich muss Z_6 gleich Null sein. Dies ist jedoch nach Hilfssatz 7 unmöglich.

Damit ist der Beweis unseres Hauptsatzes beendet.

Mathematisches Institut
Universität Turku
Finnland

Literatur

[1] DYSON, F. J.: The approximation to algebraic numbers by rationals. - Acta Math. 79 (1947), 225—240.

[2] GELFOND, A. O.: Transcendental and algebraic numbers. New York 1960.

[3] HYYRÖ, S.: Über Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. - Ann. Univ. Turkuensis, Ser. A I, 84 (1965), 1—12.

[4] SCHNEIDER, TH.: Über eine Dysonsche Verschärfung des Siegel-Thueschen Satzes. - Arch. d. Math. 1 (1948/49), 288—295.

Gedruckt September 1965