

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

390

**CHARAKTERISIERUNG DER
QUASIKONFORMITÄT MIT HILFE DER
WINKELVERZERRUNG**

VON

OSSI TAARI

HELSINKI 1966
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

<https://doi.org/10.5186/aasfm.1966.390>

Am 14. Januar 1966 vorgelegt von OLLI LEHTO und K. I. VIRTANEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1966

Vorwort

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Olli Lehto und Herrn Dozent Dr. K. I. Virtanen meinen tiefstempfundenen Dank für die Anregung zu dieser Untersuchung sowie auch für ihre stete und ermunternde Anteilnahme während der Arbeit auszusprechen. Ihre wertvollen Ratschläge und Verbesserungsvorschläge haben mir sehr geholfen, diese Abhandlung in ihrer endgültigen Form niederschreiben zu können.

Ferner danke ich Dr. phil. Marta Römer für die sprachliche Durchsicht.

Des weiteren schulde ich grossen Dank für die zwei Stipendien für junge Wissenschaftler, die mir zugunsten der vorliegenden Arbeit zuteil geworden ist.

Helsinki, im Januar 1966

Ossi Taari

Einleitung

Die konformen Abbildungen haben viele Eigenschaften, die in verallgemeinerter Form zur Charakterisierung der Quasikonformität benutzt werden können. Die bekanntesten kommen in der analytischen und der geometrischen Definition vor, die auf einer Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen bzw. der Modulnvarianz eines Vierecks bei einer konformen Abbildung beruhen.

Eine der anschaulichsten Eigenschaften der konformen Abbildungen ist die Winkeltreue. Ihr entspricht bei einer quasikonformen Abbildung — wenigstens in jedem regulären Punkt — die Beschränktheit der Winkelverzerrung. Wie Menchoff [7] gezeigt hat, kann die Winkeltreue für die Definition der Konformität benutzt werden, und die Frage liegt nahe, ob auch die Quasikonformität sich in entsprechender Weise charakterisieren lässt.

Da eine quasikonforme Abbildung nicht überall differenzierbar zu sein braucht, ist es nötig, den Winkel zwischen zwei beliebigen Jordanbogen zu definieren. Diese Verallgemeinerung des Winkelbegriffes soll natürlich so vorgenommen werden, dass die neuen Winkel mit den üblichen übereinstimmen, falls die betrachteten Bogen im Schnittpunkt Tangenten besitzen.

Während der Ausarbeitung dieser Abhandlung ist eine Arbeit von Agard und Gehring [1] erschienen, in der dasselbe Problem behandelt wird. Die Verfasser geben eine Winkeldefinition, die auf einer einfachen geometrischen Betrachtung beruht. In der vorliegenden Arbeit werden die verallgemeinerten Winkel dagegen mittels einer konformen Hilfsabbildung erklärt. Von diesen zwei Definitionen ausgehend, gewinnt man viele gleichartige Resultate, die wegen der verschiedenen Natur des benutzten Winkelbegriffes jedoch keine unmittelbaren gegenseitigen Folgerungen sind, vgl. [1], S. 3.

Die Arbeit ist in zwei Kapitel eingeteilt; im ersten von beiden wird die Winkelverzerrung bei einer quasikonformen Abbildung betrachtet. Nachdem in den §§ 1 und 2 einige Grundeigenschaften der quasikonformen Abbildungen behandelt worden sind, wird in § 3 die Winkelveränderung untersucht für den Spezialfall, in dem das Bild eines Schenkels geradlinig

ist. In § 4 werden dann die verallgemeinerten Winkel derart erklärt, dass die Ergebnisse von § 3 sich unmittelbar auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

In zweiten Kapitel handelt es sich um die Definition einer quasikonformen Abbildung mit Hilfe der Winkelverzerrung. Hier spielt eine zentrale Rolle Satz 6, nach dem es genügt, die Bildwinkel auf geeignete Weise nach unten zu beschränken. Die Paragraphen 5 und 6 enthalten vorbereitende Betrachtungen; insbesondere wird in § 5 eine Verzerrungsfunktion eingeführt, mit deren Hilfe Satz 6 formuliert wird. Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich umfassend und wird in § 7 in drei Teilen geführt. Die darauffolgenden Paragraphen bestehen hauptsächlich aus Folgerungen von Satz 6; man erhält z.B. eine Verallgemeinerung des am Anfang genannten Menchoffschen Resultates.

I. WINKELVERZERRUNG BEI QUASIKONFORMEN ABBILDUNGEN

§ 1. Die Definition und einige Grundeigenschaften quasikonformer Abbildungen

1.1. *Das Viereck und sein Modul.* Ein Viereck $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ besteht aus einem Jordangebiet Q der komplexen Ebene und aus vier auf seinem Rande gelegenen Punkten z_1, z_2, z_3, z_4 , deren Reihenfolge mit der in bezug auf Q positiven Orientierung übereinstimmt. Die Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 heißen Eckpunkte und die Bogen $\widehat{z_1 z_2}, \widehat{z_3 z_4}$ a -Seiten bzw. $\widehat{z_2 z_3}, \widehat{z_4 z_1}$ b -Seiten von $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Das Viereck $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ wird auch kurz mit Q bezeichnet, soweit kein Missverständnis zu befürchten ist. Ein Viereck, das aus einem Rechteck und dessen geometrischen Ecken besteht, wird auch Rechteck genannt. Im folgenden kommen nur achsenparallele Rechtecke vor, ihre horizontalen Seiten werden dann immer als a -Seiten gewählt.

Es seien $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ und $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ zwei Vierecke und w ein Homöomorphismus der abgeschlossenen Hülle \bar{Q} von Q auf die abgeschlossene Hülle \bar{Q}' von Q' . Geht z_i dabei in w_i über, $i = 1, 2, 3, 4$, so heisst w ein Homöomorphismus des Vierecks $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ auf $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Ist seine Einschränkung in Q konform, so nennt man w eine konforme Abbildung von $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ auf $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Für jedes Viereck $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ gibt es eine Klasse ihm konform-äquivalenter Rechtecke $R(0, \alpha, \alpha + i\beta, i\beta)$, bei denen α und β positiv sind. Alle diese Rechtecke sind ähnlich, und das Verhältnis

$$(1.1) \quad M(Q) = \frac{\alpha}{\beta}$$

hängt deshalb nur vom Viereck Q ab. Diese Grösse ist *Modul* von $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Der Modul eines gegebenen Vierecks Q lässt sich bekanntlich auch auf die folgende Weise charakterisieren. Wir bezeichnen mit \mathcal{C}_a die Familie aller rektifizierbaren Bogen, die mit Ausnahme ihrer Endpunkte in Q liegen und dessen a -Seiten miteinander verbinden. Ist ϱ eine in Q definierte, nichtnegative Borelsche Funktion, für welche

$$\int_C \varrho |dz| \geq 1, C \in \mathcal{C}_a,$$

ist, so besteht (vgl. [6], S. 139)

$$(1.2) \quad M(Q) = \inf_{\varrho} \left(\int \int_Q \varrho^2 d\sigma \right).$$

Mit Hilfe dieser Beziehung ist die folgende Monotonieeigenschaft des Moduls leicht zu beweisen.

Lemma 1. Liegt ein Viereck Q der $z = x + iy$ -Ebene zwischen den Geraden $x = x_0$, $x = x_0 + s$ ($s > 0$) und trennen die Geraden $y = y_0$, $y = y_0 + t$ ($t > 0$) seine a -Seiten, so gilt die Ungleichung

$$(1.3) \quad M(Q) \leq \frac{s}{t}.$$

Dies folgt sofort aus (1.2), wenn man im Streifengebiet $y_0 < y < y_0 + t$ $\varrho = 1/t$ und anderswo $\varrho = 0$ wählt.

1.2. *Definition einer quasikonformen Abbildung.* Es sei w ein orientierungserhaltender Homöomorphismus eines Gebietes G auf ein Gebiet G' und $Q, \bar{Q} \subset G$, ein Viereck. Das Verhältnis

$$(1.4) \quad K(Q) = \frac{M(w(Q))}{M(Q)},$$

in dem $w(Q)$ das Bildviereck von Q ist, heisst die Dilatation von Q bei der Abbildung w . Die obere Grenze

$$(1.5) \quad K_w = \sup_{\bar{Q} \subset G} K(Q)$$

ist die *maximale Dilatation* von w .

Die folgende Definition der Quasikonformität rührt von Pfluger und Ahlfors her. Zum Unterschied von anderen Definitionen wird sie *geometrische Definition* genannt.

Definition 1. Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus $w : G \rightarrow G'$ heisst eine *quasikonforme Abbildung*, wenn seine maximale Dilatation endlich ist. Gilt $K_w \leq K < \infty$, so wird w K -quasikonform genannt.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass die Umkehrung w^{-1} einer K -quasikonformen Abbildung w wieder K -quasikonform ist. Auch ist leicht zu erkennen, dass die zusammengesetzte Abbildung $w \circ f$ quasikonform ist, falls w und f es sind, und zwar gilt hierbei

$$(1.6) \quad K_{w \circ f} \leq K_w K_f.$$

Da eine konforme Abbildung die Moduln aller Vierecke invariant lässt, ist $K_w = 1$ für konformes w . Umgekehrt lässt sich beweisen, dass eine 1-quasikonforme Abbildung konform ist.

Einige Eigenschaften der konformen Abbildungen können unverändert auf quasikonforme Abbildungen übergeführt werden. Dies gilt z.B. für die Hebbarkeit isolierter Randpunkte, für die Fortsetzbarkeit auf den Rand bei einer Abbildung zwischen Jordangebieten und für das Spiegelungsprinzip, vgl. [6], S. 49.

1.3. Extremalgebiet von Grötzsch. Ein zweifach zusammenhängendes Gebiet heisst Ringgebiet. Wir betrachten nur Ringgebiete, deren Randkomponenten Kontinuen sind. Ein solches Ringgebiet lässt sich konform auf einen eindeutig bestimmten Kreisring $1 < |z| < r$ abbilden; die Zahl $\log r$ wird *Modul* des Ringgebietes genannt.

Der längs der Strecke $\{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq r < 1, y = 0\}$ aufgeschlitzte Einheitskreis wird im folgenden das Extremalgebiet von Grötzsch genannt. Der Modul dieses Gebietes ist

$$(1.7) \quad \mu(r) = \frac{1}{2} \pi \frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)},$$

wobei

$$K(r) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}$$

ist.

Bei vielen Verzerrungsproblemen spielt die Funktion

$$(1.8) \quad \varphi_K(r) = \mu^{-1}\left(\frac{1}{K} \mu(r)\right)$$

eine wichtige Rolle. Sie ist echt zunehmend und stetig auf dem Intervall (0,1) und besitzt in seinen Endpunkten die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_K(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1} \varphi_K(r) = 1;$$

für $K > 1$ gilt

$$(1.9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_K(r)}{r} = \infty,$$

vgl. z.B. [6], S. 68.

Mit Hilfe der Funktion φ_K kann der folgende Verzerrungssatz ausgedrückt werden, vgl. Hersch und Pfluger [5].

Lemma 2 Ist w eine K -quasikonforme Selbstabbildung des Einheitskreises $|z| < 1$, so gilt für alle z_1, z_2 ($|z_1| < 1, |z_2| < 1$)

$$(1.10) \quad \left| \frac{w(z_1) - w(z_2)}{1 - \overline{w(z_1)} w(z_2)} \right| \leq \varphi_K \left(\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \right).$$

Bemerkung. Die obige Abschätzung ist bestmöglich, d.h. zu jedem Punktpaar z_1, z_2 gibt es eine Abbildung w , wofür Gleichheit in (1.10) besteht. Liegen die Punkte z_1, z_2 mit ihren Bildern auf einem Durchmesser von $|z| < 1$, so ist die extremale Abbildung w symmetrisch in bezug auf diesen Durchmesser.

Unter Anwendung von Lemma 2 kann der folgende Hilfssatz leicht bewiesen werden.

Lemma 3. Bei einer K -quasikonformen Selbstabbildung $w = u + iv, w(\infty) = \infty$, des Parallelstreifens $\{x + iy \mid 0 < y < 2\pi\}$ gilt auf jeder vertikalen Strecke $\{x = x_0, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ die Abschätzung

$$(1.11) \quad |u(x_0 + iy) - u(x_0)| < d,$$

in der d nur von K abhängt.

Zur Begründung dieses Hilfssatzes braucht man nur w durch Spiegelung zu einer Selbstabbildung des Streifens $\{-4\pi < y < 4\pi\}$ fortzusetzen und dieses Gebiet konform auf den Einheitskreis abzubilden. Die Beziehung (1.11) folgt dann unmittelbar aus Lemma 2.

1.4. *Analytische Charakterisierung einer quasikonformen Abbildung.* Von der geometrischen Definition ausgehend können weitführende Schlüsse über die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften einer quasikonformen Abbildung gezogen werden. Wir wollen hier einige von diesen »analytischen« Eigenschaften erwähnen.

Eine im Gebiet G stetige Funktion w ist *absolut stetig auf Geraden* oder ASG in G , wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jedes achsenparallele Rechteck $R = \{z = x + iy \mid a < x < b, c < y < d\}$, $\bar{R} \subset G$, ist w absolut stetig als Funktion von x auf fast allen Strecken¹⁾ $I_y = \{z \mid a < x < b\}$ und als Funktion von y auf fast allen Strecken $I_x = \{z \mid c < y < d\}$.

Eine in G ASG-Funktion besitzt fast überall in G endliche partielle Ableitungen. Ist sie dazu ein Homöomorphismus, so ist sie auch fast überall in G differenzierbar (Gehring–Lehto [3]). Es gilt also für fast alle $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$

$$w(z) = w(z_0) + w_x(z_0)(x - x_0) + w_y(z_0)(y - y_0) + o(z - z_0),$$

wobei $o(z - z_0) / (z - z_0) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$.

Es seien nun G, G' zwei endliche Gebiete und $w : G \rightarrow G'$ eine quasikonforme Abbildung. Strebel [11] und Mori [8] haben bewiesen, dass w dann die ASG-Eigenschaft besitzt; nach dem Obigen ist sie somit fast überall in G differenzierbar. Ferner gelten folgende von Morrey und Bers herrührende Resultate (vgl. [6], S. 173–174).

Die Bildmenge jeder in bezug auf das Flächenmass messbaren Menge ist wieder messbar, wobei also alle Nullmengen auf Nullmengen übergehen. Die Jacobische Funktionaldeterminante J von w ist positiv in fast allen Punkten von G , und das Mass des Bildes $w(E)$ einer messbaren Menge $E \subset G$ lässt sich aus der Formel

$$(1.12) \quad m(w(E)) = \int \int_E J(z) \, dx dy$$

berechnen.

Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus w wird regulär im Punkt z genannt, wenn er in z differenzierbar ist und eine positive Funktionaldeterminante besitzt; z heisst dann ein regulärer Punkt von w . Ist w K -quasikonform, so ist es nach dem Obigen regulär fast überall in seinem Definitionsbereich. Durch eine einfache Berechnung ist ersichtlich, dass es in jedem regulären Punkt die *Dilatationsbedingung*

$$(1.13) \quad \max_{\theta} |D_{\theta} w(z)|^2 \leq K J(z),$$

erfüllt, in der $D_{\theta} w(z) = e^{-i\theta} (w_x(z) \cos \theta + w_y(z) \sin \theta)$ die Ableitung von w in die Richtung θ bedeutet. Diese Ungleichung kann wegen der Beziehung $J(z) = \max_{\theta} |D_{\theta} w(z)| \min_{\theta} |D_{\theta} w(z)| > 0$ auch in der Form

¹⁾ Dies bedeutet, dass die Menge derjenigen y -Werte $c < y < d$, für die w nicht absolut stetig ist, das Längenmass Null besitzt. Die später in diesem Abschnitt vorkommenden Benennungen »fast überall in G «, »eine messbare Teilmenge von G « beziehen sich dagegen auf das Lebesguesche Flächenmass.

$$(1.14) \quad D(z) = \frac{\max_{\varrho} |D_{\varrho} w(z)|}{\min_{\varrho} |D_{\varrho} w(z)|} \leq K$$

geschrieben werden, in der $D(z)$ *Dilatationsquotient* von w im Punkte z genannt wird.

Die Ungleichung (1.13) kann in Verbindung mit gewissen Regularitätsbedingungen zur Charakterisierung der Quasikonformität benutzt werden. Die Arbeit [9] von Morrey enthält erstmalig eine solche analytische Definition, deren Äquivalenz mit der geometrischen von Mori [8] und Bers [2] bewiesen worden ist. Pfluger [10] und Gehring—Lehto [3] haben diese Definition noch vereinfacht; in ihrer endgültigen Form lautet sie wie folgt.

Definition 2. Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus $w: G \rightarrow G'$ ist K -quasikonform, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

1°. w ist ASG in G ,

2°. Es gilt $\max_{\varrho} |D_{\varrho} w(z)|^2 \leq KJ(z)$ fast überall in G .

1.5. *Reguläre quasikonforme Abbildungen.* Eine K -quasikonforme Abbildung $w: G \rightarrow G'$ heisst *regulär in G* , wenn w und seine Umkehrung w^{-1} in G bzw. G' stetig differenzierbar sind. Die Beziehung (1.13) gilt dann für alle $z \in G$. Die regulären Abbildungen wurden von Grötzsch [4] im Jahre 1928 definiert.

§ 2. Bild eines Winkels bei einer quasikonformen Abbildung

2.1. *Winkel mit Scheitel in einem regulären Punkt.* Es sei $w: G \rightarrow G'$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und z_0 ein regulärer Punkt von w . Der Bildbogen jeder durch z_0 gehenden Strecke hat dann eine Tangente im Punkte $w(z_0)$. Es sei α ein Winkel, dessen Scheitel im Punkte z_0 liegt und dessen einer Schenkel festgelegt ist. Der Bildwinkel $\omega(\alpha)$ von α bei der Abbildung w wird eindeutig bestimmt durch die Forderung, dass ω eine stetige, zunehmende Funktion von α ist, die für $\alpha = 0$ verschwindet. Für $\omega(\alpha)$ gilt folgender Verzerrungssatz.

Satz 1. Es sei w ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und $\alpha > 0$ ein Winkel, dessen Scheitel in einem regulären Punkt z_0 von w liegt. Dann gilt die Doppelungleichung

$$(2.1) \quad \frac{1}{D(z_0)} \leq \frac{\omega(\alpha)}{\alpha} \leq D(z_0),$$

in der $D(z_0)$ der Dilatationsquotient von w im Punkte z_0 ist. Gleichheit kann im Falle $D(z_0) > 1$ an keiner Stelle bestehen.

Beweis. Durch geeignete Ähnlichkeitstransformationen wird erreicht, dass $z_0 = 0$ und

$$(2.2) \quad w(z) = w(x + iy) = Dx + iy + o(z)$$

ist, wobei D der Dilatationsquotient von w im Nullpunkt ist.

Für jeden Punkt z eines Radius $s_\alpha = \{z \mid z = re^{i\alpha}, r > 0\}$ ist $\arg w(z) = \arg(Dx + iy + o(z)) = \arg(D \cos \alpha + i \sin \alpha) + \arg(1 + \varepsilon(z))$, wobei $\varepsilon(z)$ für $z \rightarrow 0$ gegen Null strebt. Der Winkel α zwischen der positiven reellen Achse und dem Radius s_α geht also in

$$(2.3) \quad \omega(\alpha) = \arg(D \cos \alpha + i \sin \alpha) = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{D} \right)$$

über, wo der Zweig von $\arctg(\operatorname{tg} \alpha / D)$ der obigen Normierung gemäss gewählt werden soll. Als Funktion von α besitzt ω die Ableitung

$$(2.4) \quad \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{D}{D^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha},$$

und es gilt also

$$(2.5) \quad \frac{1}{D} \leq \frac{d\omega}{d\alpha} \leq D,$$

wo Gleichheit an einer Stelle nur für $\alpha = 0, \pi$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ vorkommt, falls $D > 1$ ist. Die gewünschte Behauptung ergibt sich hieraus durch Integration.

2.2. Nichtreguläre Punkte. Ist der Scheitel eines Winkels α ein nicht-regulärer Punkt, so braucht α keinen Bildwinkel im gewöhnlichen Sinne zu haben. Diese Möglichkeit kommt auch dann vor, wenn die Abbildung quasikonform ist. Als Beispiel dient folgende Abbildung, die später noch in einem anderen Zusammenhang angewandt wird.

Beispiel 1. Es sei $w = Re^{i\varphi}$ der durch die Gleichungen

$$(2.6) \quad \begin{cases} R = r \\ \Phi = \begin{cases} \varphi + \frac{\pi - \varphi}{\pi} \sin \log r & \text{für } 0 \leq \varphi < \pi, r > 0 \\ \varphi + \frac{\varphi - \pi}{\pi} \sin \log r & \text{für } \pi \leq \varphi < 2\pi, r > 0 \end{cases} \end{cases}$$

definierte Homöomorphismus der Ebene $z = re^{i\varphi}$. Für diese Abbildung ist der Punkt $z = 0$ offenbar nichtregulär. Mit Ausnahme der negativen

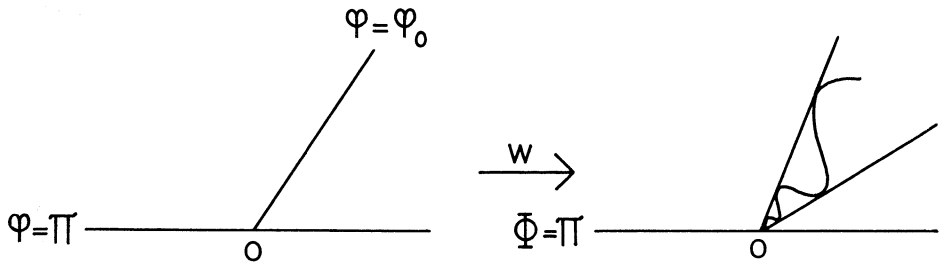


Abb. 1.

reellen Achse geht jede von Nullpunkt ausgehende Halbgerade $\{z \mid z = re^{i\varphi_0}, r \geq 0\}$ in einen Bogen über, der im Punkte $w = 0$ keine Tangente besitzt. Vgl. Abb. 1.

In allen Punkten $z \neq 0, \infty$ besitzt w stetige partielle Ableitungen, und ihre Funktionaldeterminante ist daselbst positiv. Die Einschränkung von w in jedem Kreisring $\{z \mid 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$ ist deshalb quasikonform, und wegen der Gleichung $w(e^{2\pi}z) = e^{2\pi}w(z)$ gilt dasselbe auch in der punktierten Ebene $\{z \mid 0 < |z| < \infty\}$. Die Punkte $z = 0, \infty$ sind aber als isolierte Singularitäten hebbar, und w ist folglich eine quasikonforme Abbildung der ganzen Ebene. Wird $\sin \log r$ in (2.6) mit einer geeignet gewählten Konstante multipliziert, so erreicht man offenbar, dass die maximale Dilatation von w mit einer vorgegebenen Zahl übereinstimmt.

§ 3. Veränderung des Winkels in dem Falle, dass das Bild des einen Schenkels geradlinig ist

3.1. *Problemstellung.* Um der Formel (2.1) entsprechende Abschätzungen auch dann zu gewinnen, wenn der Scheitel des zu betrachtenden Winkels ein nichtregulärer Punkt der Abbildung ist, hat man offenbar den Winkelbegriff auf irgendeine Weise zu verallgemeinern (vgl. Agard—Gehring [1]).

Vorbereitend betrachten wir die Klasse W_K aller K -quasikonformen Selbstabbildungen der längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzten z -Ebene, die den Null- und den Unendlichkeitspunkt festhalten. Es sei $w \in W_K$ und $\alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$, ein Winkel mit dem oberen Schlitzufer und der Halbgeraden

$$(3.1) \quad \Gamma = \{z \mid z = re^{i\alpha}, r \geq 0\}$$

als Schenkel. Der Bildbogen Γ' von Γ braucht dann keine Tangente im Nullpunkt zu besitzen, jedenfalls existieren aber der untere und der obere Limes

$$(3.2) \quad \begin{cases} \underline{\omega}(\alpha) = \liminf_{r \rightarrow 0} \arg(w(re^{i\alpha})) \\ \overline{\omega}(\alpha) = \limsup_{r \rightarrow 0} \arg(w(re^{i\alpha})), \end{cases}$$

bei denen $0 < \arg(w(re^{i\alpha})) < 2\pi$ und also $0 \leq \underline{\omega}(\alpha) \leq \overline{\omega}(\alpha) \leq 2\pi$ ist. Wir nennen diese Zahlen den *inneren* und den *äusseren Winkel* zwischen der positiven reellen Achse und dem Bogen I' .

Wir werden im folgenden die Winkel $\overline{\omega}(\alpha)$ und $\underline{\omega}(\alpha)$ als Funktionen von α abschätzen. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, die längs der positiven reellen Achsen aufgeschlitzten z - und w -Ebenen durch einen Zweig des Logarithmus auf die Parallelstreifen $S = \{\zeta = \xi + i\eta \mid 0 < \eta < 2\pi\}$ bzw. $S' = \{u + iv \mid 0 < v < 2\pi\}$ abzubilden. I und I' gehen hierbei in eine horizontale Gerade C ($\eta = \alpha$) bzw. in einen Jordanbogen C' über, die in S bzw. S' liegen. Die zusammengesetzte Abbildung $f: S \rightarrow S'$, $f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta) = \log w(e^\zeta)$, ist K -quasikonform, und da ihr imaginärer Teil gleich dem Argument von w ist, lassen die Ausdrücke (3.2) sich auch in der Form

$$(3.2)' \quad \begin{cases} \underline{\omega}(\alpha) = \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi + i\alpha) \\ \overline{\omega}(\alpha) = \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi + i\alpha) \end{cases}$$

schreiben.

3.2. *Abschätzungen für $\overline{\omega}(\alpha)$ nach oben und für $\underline{\omega}(\alpha)$ nach unten.* Wir betrachten zuerst einen Punkt $\zeta_0 = \xi_0 + i\alpha \in C$ und wollen den imaginären Teil $v(\zeta_0)$ seines Bildpunktes $f(\zeta_0) \in C'$ in beiden Richtungen abschätzen. Ohne Einschränkung kann man dabei $\zeta_0 = i\alpha$ und $u(i\alpha) = 0$ annehmen.

Durch Spiegelungen an den reellen Achsen kann f zu einer K -quasikonformen Selbstabbildung des Streifengebietes $\{\zeta \mid -2\pi < \eta < 2\pi\}$ erweitert werden. Bildet man dieses Gebiet durch die Funktion ψ ,

$$(3.3) \quad \psi(\zeta) = \frac{e^{\frac{\zeta}{4}} - 1}{e^{\frac{\zeta}{4}} + 1},$$

auf den Einheitskreis konform ab, so ergibt sich unter Anwendung von Lemma 2 auf die Punkte $\psi(\zeta_0) = i \operatorname{tg}(\alpha/8)$ und $\psi(-\zeta_0) = -i \operatorname{tg}(\alpha/8)$ die Doppelungleichung

$$(3.4) \quad \varphi_K^{-1}\left(\sin \frac{\alpha}{4}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{4} v(\zeta_0)\right) \leq \varphi_K\left(\sin \frac{\alpha}{4}\right).$$

Diese für jeden Punkt $\zeta_0 = \xi_0 + i\alpha \in C$ gültige Abschätzung ist zuerst von Hersch und Pfluger in [5] hergeleitet worden. Für den inneren und äusseren Winkel (3.2)' folgt hieraus die Verzerrungsformel

$$(3.5) \quad \begin{cases} \underline{\omega}(\alpha) \geq 4 \overline{\text{arc sin}} \left(\varphi_K^{-1} \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) \right) \\ \overline{\omega}(\alpha) \leq 4 \overline{\text{arc sin}} \left(\varphi_K \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) \right). \end{cases}$$

Im (3.4) lässt sich Gleichheit an einer Stelle für jeden *einzelnen* Punkt ζ_0 durch eine geeignete Abbildung erreichen. Dies besagt jedoch nichts über die Genauigkeit der Formel (3.5); wir werden aber zeigen, dass auch die darin vorkommenden Schranken bestmöglich sind¹⁾. Zu diesem Zweck wollen wir eine K -quasikonforme Abbildung $f: S \rightarrow S'$ konstruieren, deren imaginärer Teil v zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ die Bedingungen

$$(3.6) \quad \sin \frac{1}{4} v(\zeta_n) > \varphi_K \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) - \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

für eine Punktfolge $\zeta_1 = i\alpha, \zeta_2 = \xi_2 + i\alpha, \dots, \zeta_n = \xi_n + i\alpha, \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -\infty$ erfüllt.

Es sei zunächst $f^* = u^* + iv^* : S \rightarrow S', u^*(i\alpha) = 0$, diejenige Abbildung, bei der Gleichheit rechts in (3.4) für $\zeta_0 = i\alpha$ besteht. Aus der Bemerkung nach Lemma 2 geht hervor, dass die Bildpunkte von $\xi + i\eta$ und $-\xi + i\eta$ für jedes $\xi + i\eta \in S$ in bezug auf die imaginäre Achse symmetrisch liegen.

Man betrachte ein Rechteck $R = R(-a, a, a + 2\pi i, -a + 2\pi i)$ und sein Bildviereck $f^*(R)$. Bezeichnet b/π den Modul von $f^*(R)$, so gibt es eine konforme Abbildung g von $f^*(R)$ auf das Rechteck $Q = Q(-b, b, b + 2\pi i, -b + 2\pi i)$. Wegen der Symmetrie von $f^*(R)$ in bezug auf die imaginäre Achse gilt $g(-u + iv) = \overline{g(u + iv)}$ für jedes $u + iv \in f^*(R)$, und die Zahl $g(f^*(i\alpha))$ ist also rein imaginär. Wir zeigen, dass sie für ein genügend grosses a die Ungleichung

$$(3.7) \quad \sin \left(\frac{1}{4} |g(f^*(i\alpha))| \right) > \varphi_K \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) - \varepsilon$$

befriedigt. Die gesuchte Abbildung $f: S \rightarrow S'$ mit der Eigenschaft (3.6) lässt sich dann von $g \circ f^*$ ausgehend durch wiederholte Spiegelungen an vertikalen Strecken konstruieren.

¹⁾ Hier wird jedoch die Frage offen gelassen, ob Gleichheit in (3.5) an einer Stelle bestehen kann.

Um (3.7) zu beweisen, wählen wir a so, dass $f^*(a)$ grösser als die in Lemma 3 vorkommende Konstante d ist. Aus der Modulbedingung $M(R) \leq KM(f^*(R))$ ergibt sich dann mit Rücksicht auf Lemma 1 und Lemma 3

$$(3.8) \quad f^*(a) > \frac{a}{K} - d.$$

Da g konform ist, gilt ferner

$$(3.9) \quad b > f^*(u) - d.$$

Durch wiederholte Spiegelungen an horizontalen Seiten kann g zu einer konformen Abbildung zwischen den Gebieten T_1 und T_2 (s. Abb. 2) erweitert werden. Wird die Bezeichnung g auch für die Fortsetzung angewandt, so ist die Funktion ψ , $\psi(u + iv) = g(u + iv) / (u + iv)$ wegen $g(0) = 0$ analytisch in T_1 . In jedem in den Streifen $\{u + iv \mid 2(n - 1)\pi \leq v \leq 2n\pi\}$ und $\{u + iv \mid 2(n - 1)\pi \leq -v \leq 2n\pi\}$ gelegenen Randpunkt von T_1 erfüllt ψ nach Lemma 3 und (3.9) die Beziehung

$$\begin{aligned} |\psi(u + iv)| &= \left| \frac{g(u + iv)}{u + iv} \right| > \sqrt{\frac{b^2 + 4(n - 1)^2\pi^2}{(f^*(a) + d)^2 + 4n^2\pi^2}} \\ &> \sqrt{\frac{(f^*(a) - d)^2 + 4(n - 1)^2\pi^2}{(f^*(a) + d)^2 + 4n^2\pi^2}}, \end{aligned}$$

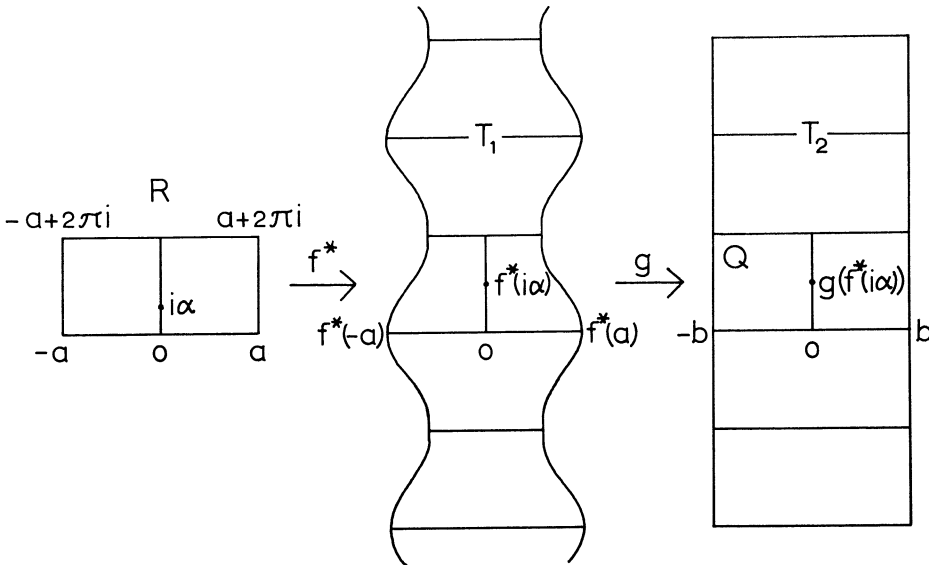


Abb. 2.

$n = 1, 2, \dots$. Es ist leicht zu ersehen, dass der rechtsstehende Ausdruck für $f^*(a) \rightarrow \infty$ gegen Eins gleichmässig in bezug auf n strebt. Wegen (3.8) kann a also so gross gewählt werden, dass

$$\left| \frac{g(u + iv)}{u + iv} \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

in jedem endlichen Randpunkt $u + iv$ von T_1 gilt. Da $1/|\varphi|$ in T_1 beschränkt ist, besteht dieselbe Ungleichung auch in jedem inneren Punkt von T_1 ; insbesondere folgt hieraus wegen $|f^*(i\alpha)| < 2\pi$ die Gültigkeit der Formel

$$|g(f^*(i\alpha))| > |f^*(i\alpha)| - \varepsilon = v^*(i\alpha) - \varepsilon.$$

Dies liefert die zu beweisende Ungleichung (3.7), weil $\sin(v^*(i\alpha)/4) = \varphi_K(\sin \alpha/4)$ ist.¹⁾

In analoger Weise schliesst man, dass auch die untere Schranke in (3.5) bestmöglich ist. Als Zusammenfassung ergibt sich also das folgende Resultat.

Satz 2. Es sei $w \in W_K$ und α , $0 < \alpha < 2\pi$, ein Winkel mit der positiven reellen Achse als einen der Schenkel. Dann gilt die Verzerrungsformel

$$(3.10) \quad 4\overline{\arcsin} \left(\varphi_K^{-1} \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) \right) \leq \underline{\omega}(\alpha) \leq \overline{\omega}(\alpha) \leq 4 \overline{\arcsin} \left(\varphi_K \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right) \right),$$

in der die Schranken bestmöglich sind.

Bemerkung. Aus der obigen Abschätzung folgt, dass $\underline{\omega}(\alpha)$ für jedes α , $0 < \alpha < 2\pi$, positiv ist. Andererseits kann wegen (1.9) für eine Winkelfolge $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ eine Folge w_n von Abbildungen obiger Art so konstruiert werden, dass die Gleichheit $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\omega}_n / \alpha_n = 0$ gilt, in der $\underline{\omega}_n$ den inneren Bildwinkel von α_n bei der Abbildung w_n bezeichnet.

3.3. *Abschätzung für $\underline{\omega}(\alpha)$ nach oben.* Hier gilt der folgende Verzerrungssatz.

Satz 3. Ist α , $0 < \alpha < 2\pi$, ein Winkel, der die positive reelle Achse als einen der Schenkel besitzt, so gilt bei jeder Abbildung $w \in W_K$ die Beziehung

$$(3.11) \quad \frac{\underline{\omega}(\alpha)}{\alpha} \leq \frac{K^2}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(K^2 - 1)}.$$

¹⁾ Die gesuchte Abbildung $g \circ f^*$ kann kürzer mit Hilfe einer Normalfamilie konstruiert werden.

Diese Abschätzung ist bestmöglich in dem Sinne, dass es eine Abbildung von W_K gibt, für die Gleichheit in (3.11) besteht.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abschätzung (3.11) gilt. Zu diesem Zweck betrachten wir wieder die in 3.1 eingeführte Abbildung $f = u + iv$ des Parallelstreifens S ; die Winkel $\bar{\omega}(\alpha)$ und $\underline{\omega}(\alpha)$ haben dann die Ausdrücke (3.2)'.

Man betrachte ein Rechteck $R = R(\xi_1, \xi_2, \xi_2 + 2\pi i, \xi_1 + 2\pi i)$, $\xi_1 < \xi_2$, und sein Bildviereck R' mit den Eckpunkten $f(\xi_1) = u_1$, $f(\xi_2) = u_2$, $f(\xi_2 + 2\pi i) = u_3 + 2\pi i$, $f(\xi_1 + 2\pi i) = u_4 + 2\pi i$. Wir bezeichnen $\xi_2 - \xi_1 = 2p$, $u_2 - u_1 = 2q$ und wählen p so gross, dass die Ungleichung $u_1 + d < u_2 - d$ besteht, in der d die in Lemma 3 vorkommende Konstante ist. Die b -Seiten von R' werden dann durch die vertikalen Geraden $u = u_1 + d$ und $u = u_2 - d$ voneinander getrennt; andererseits liegen sie zwischen den Geraden $u = u_1 - d$ und $u = u_2 + d$.

Nach den Formeln (3.2)' gibt es zu jedem ε , $0 < \varepsilon < \underline{\omega}(\alpha)$, eine Zahl ξ_ε derart, dass die Doppelungleichung

$$\underline{\omega}(\alpha) - \varepsilon < v(\xi + i\alpha) < \bar{\omega}(\alpha) + \varepsilon$$

für alle $\xi < \xi_\varepsilon$ besteht. Von dem Rechteck R sei angenommen, dass $\xi_2 < \xi_\varepsilon$ sei.

Durch die Gerade $\eta = \alpha$ wird R in zwei Rechtecke $R_1 = R_1(\xi_1, \xi_2, \xi_2 + i\alpha, \xi_1 + i\alpha)$ und $R_2 = R_2(\xi_1 + i\alpha, \xi_2 + i\alpha, \xi_2 + 2\pi i, \xi_1 + 2\pi i)$ geteilt; ihre Bildvierecke seien R'_1 und R'_2 ; siehe Abb. 3.

Nach Lemma 1 gelten die Modulabschätzungen

$$(3.12) \quad \frac{1}{K} \frac{2p}{\alpha} = \frac{1}{K} M(R_1) \leq M(R'_1) < \frac{2q + 2d}{\underline{\omega}(\alpha) - \varepsilon},$$

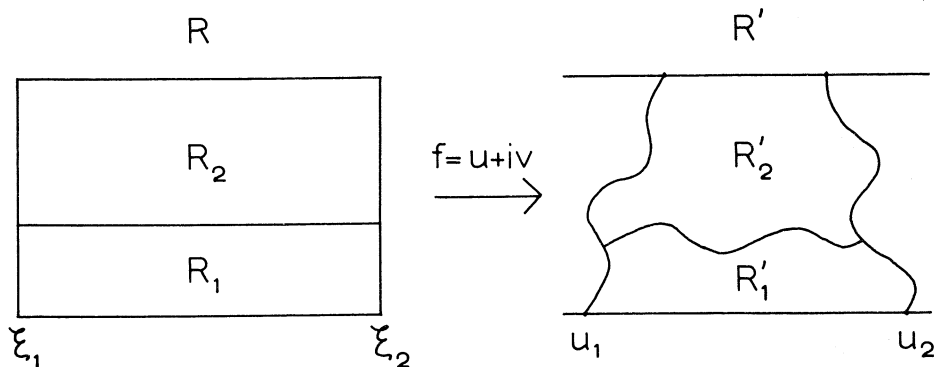


Abb. 3.

$$(3.13) \quad K \frac{2p}{2\pi - \alpha} = K M(R_2) \geq M(R'_2) > \frac{2q - 2d}{2\pi - \underline{\omega}(\alpha) + \varepsilon}.$$

Durch Elimination des Verhältnisses q/p folgt hieraus

$$(3.14) \quad \frac{1}{K} \frac{\underline{\omega}(\alpha) - \varepsilon}{\alpha} - \frac{d}{p} < K \frac{2\pi - \underline{\omega}(\alpha) + \varepsilon}{2\pi - \alpha} + \frac{d}{p}.$$

Lässt man nun p gegen unendlich streben, so ergibt sich

$$\frac{\underline{\omega}(\alpha) - \varepsilon}{\alpha} \leq \frac{K^2}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(K^2 - 1)}.$$

Da ε , $0 < \varepsilon < \underline{\omega}(\alpha)$, beliebig klein gewählt werden kann, gilt die Behauptung (3.11).

Ferner ist die Existenz einer solchen Abbildung von W_K zu zeigen, für die Gleichheit in (3.11) besteht. Zu diesem Zweck wird der Parallelstreifen $S = \{ \xi + i\eta \mid 0 < \eta < 2\pi \}$ zuerst durch die horizontale Gerade $\eta = \alpha$ in zwei Gebiete zerlegt; das untere von diesen sei S_1 und das obere S_2 . Die Funktionen f_1, f_2 ,

$$f_1(\xi + i\eta) = C\xi + iKC\eta,$$

$$f_2(\xi + i\eta) = C\xi + i\left(2\pi - \frac{C}{K}(2\pi - \eta)\right),$$

bilden für $C > 0$ den Streifen S_1 bzw. S_2 auf einen horizontalen Parallelstreifen S'_1 bzw. S'_2 K -quasikonform ab. Setzt man

$$C = \frac{K}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(K^2 - 1)},$$

so stimmen f_1 und f_2 auf der gemeinsamen Randgeraden von S_1 und S_2 überein, und die durch

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) \quad \text{für } \zeta \in S_1,$$

$$f(\zeta) = f_2(\zeta) \quad \text{für } \zeta \in S_2$$

definierte Funktion $f = u + iv$ ist eine K -quasikonforme Selbstabbildung von S . Für diese gilt die gesuchte Gleichung

$$\frac{\underline{\omega}(\alpha)}{\alpha} = \frac{K^2}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(K^2 - 1)}.$$

Bemerkung. Werden alle Winkel α , $0 < \alpha < 2\pi$, und alle Abbildungen von W_K berücksichtigt, so ist die obere Grenze von $\underline{\omega}(\alpha)/\alpha$ gleich

K^2 ; nach (3.11) kann diese Schranke jedoch für keinen Winkel $\alpha > 0$ erreicht werden.

Wir beweisen noch den folgenden Satz.

Satz 4. Bei jeder Abbildung $w \in W_K$ mit $K > 1$ gilt die Ungleichung

$$(3.15) \quad \sup_{0 < \alpha < 2\pi} \frac{\underline{\omega}(\alpha)}{\alpha} < K^2.$$

Beweis. Ist (3.15) nicht richtig, so gibt es für jedes $\delta > 0$ einen Winkel α , $0 < \alpha < 2\pi$, derart, dass $\underline{\omega}(\alpha) > (K^2 - \delta)\alpha$ ist. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gelten die Abschätzungen (3.12) und (3.13) für jedes im Beweis von Satz 3 betrachtete Rechteck R . Lässt man in (3.12) p gegen unendlich streben, so ergibt sich

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q}{p} \geq \frac{(K^2 - \delta)\alpha - \varepsilon}{K\alpha}.$$

Wie leicht ersichtlich, hängt die Schranke $\lim_{p \rightarrow \infty} (q/p)$ nicht von ξ_2 ab, und durch $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q}{p} \geq K - \frac{\delta}{K}.$$

Diese Ungleichung gilt für jedes $\delta > 0$, daher ist

$$(3.16) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q}{p} \geq K.$$

Lässt man nun in (3.13) $p \rightarrow \infty$, so ergibt sich nach (3.16) für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\frac{2\pi - (K^2 - \delta)\alpha + \varepsilon}{2\pi - \alpha} \geq 1,$$

also $K^2 - \delta \leq 1$. Hieraus folgt $K = 1$, was der Annahme $K > 1$ widerspricht.

3.4. *Abschätzungen für $\bar{\omega}(\alpha)$ nach unten.* Mit Hilfe der Resultate des obigen Abschnittes lässt sich auch der obere Bildwinkel $\bar{\omega}(\alpha)$ nach unten abschätzen. Man braucht nämlich dabei nur die inversen Abbildungen zu betrachten und α durch $\bar{\omega}(\alpha)$ bzw. $\underline{\omega}(\alpha)$ durch α zu ersetzen.¹⁾ Die der Abschätzung (3.11) entsprechende Formel lautet dann

$$(3.17) \quad \frac{\bar{\omega}(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{1}{K^2 - \frac{\alpha}{2\pi}(K^2 - 1)},$$

¹⁾ Durch Anwendung von Lemma 2 ist es leicht zu ersehen, dass $f^{-1}(u + i\underline{\omega} + re^{i\underline{\omega}}) \rightarrow f^{-1}(u + i\underline{\omega})$ für $r \rightarrow 0$ gleichmässig in bezug auf u . Daraus folgt, dass der äussere Bildwinkel von $\underline{\omega}(\alpha)$ bei der Abbildung f^{-1} gleich α ist.

worin Gleichheit für jedes α durch eine Abbildung von W_K erreicht werden kann. Daher ist auch mit festem $\alpha > 0$

$$\inf \frac{\bar{\omega}(\alpha)}{\alpha} > \frac{1}{K^2},$$

worin alle Abbildungen von W_K einbezogen sind.

Schliesslich folgt aus Satz 4, dass bei jeder Abbildung $w \in W_K$ mit $K > 1$ die Ungleichung

$$\inf_{0 < \alpha < 2\pi} \frac{\bar{\omega}(\alpha)}{\alpha} > \frac{1}{K^2}$$

besteht.

Bemerkung. Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die in § 3 vorkommenden Abbildungen $w \in W_K$ in den extremalen Fällen wegen ihrer symmetrischen Randwerte auf die ganze Ebene erweitert werden können.

§ 4. Winkelverzerrung bei einer allgemeinen quasikonformen Abbildung

4.1. *Verallgemeinerung des Winkelbegriffes.* Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Fall über, in dem die Schenkel des zu betrachtenden Winkels auf zwei Jordanbögen abgebildet werden, die keine Tangenten zu besitzen brauchen. Zuerst wollen wir die in § 3 gegebenen Definitionen des inneren und des äusseren Winkels für diesen Fall verallgemeinern.

Es seien

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \{ z \mid z = z_1(t), 0 \leq t \leq 1, z_1(0) = z_0 \} \\ \Gamma_2 &= \{ z \mid z = z_2(t), 0 \leq t \leq 1, z_2(0) = z_0 \} \end{aligned}$$

zwei Jordanbögen der z -Ebene, die den Punkt z_0 als ihren einzigen gemeinsamen Punkt besitzen. Man wähle ein Gebiet U der z -Ebene, $z_0 \in U$, und einen Punkt $z' = z_1(t')$, $0 < t' < 1$, derart, dass der Bogen

$$\Gamma_1(z_0, z') = \{ z \mid z = z_1(t), 0 < t < t' \}$$

in U liegt. Man schneide U längs des Bogens $\Gamma_1(z_0, z')$ aus und bezeichne die Ufer des Schlitzes mit $\Gamma_1^+(z_0, z')$ und $\Gamma_1^-(z_0, z')$, siehe Abb. 4.

Es sei η eine im Gebiet $U - \overline{\Gamma_1(z_0, z')}$ definierte, beschränkte harmonische Funktion, die auf $\Gamma_1^+(z_0, z')$ und $\Gamma_1^-(z_0, z')$ die Werte 0 bzw. 2π annimmt. Eine Funktion dieser Art ist das (geeignet normierte)

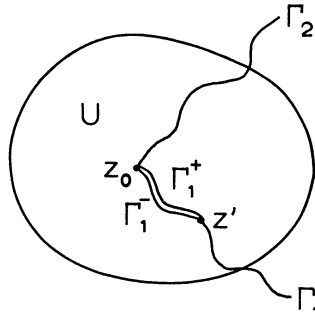


Abb. 4.

Argument einer konformen Abbildung von $U - \overline{I_1(z_0, z')}$, die den Schlitz $I_1(z_0, z')$ in die positive reelle Achse überführt. Wir nennen die Grenzwerte

$$(4.2) \quad \begin{cases} \underline{\omega}^+(I_1, I_2) = \liminf_{t \rightarrow 0} \eta(z_2(t)) \\ \overline{\omega}^+(I_1, I_2) = \limsup_{t \rightarrow 0} \eta(z_2(t)) \end{cases}$$

den *positiven inneren und äusseren Winkel zwischen den Bogen I_1 und I_2* . Später wird gezeigt, dass diese Grössen von der Wahl des Punktes z' , des Gebiets U und der Funktion η unabhängig sind.

Vertauscht man die Rollen von I_1 und I_2 , so erhält man eine andere Definition für den inneren und den äusseren Winkel. Man schneide U längs eines Teilbogens

$$I_2(z_0, z'') = \{ z \mid z = z_2(t), 0 < t < t'' \}$$

von I_2 aus und bezeichne mit η^* eine in $U - \overline{I_2(z_0, z'')}$ beschränkte harmonische Funktion mit den Randwerten -2π und 0 auf $I_2^+(z_0, z'')$ bzw. $I_2^-(z_0, z'')$. Die Grenzwerte

$$(4.3) \quad \begin{cases} \underline{\omega}^-(I_1, I_2) = \limsup_{t \rightarrow 0} \eta^*(z_1(t)) \\ \overline{\omega}^-(I_1, I_2) = \liminf_{t \rightarrow 0} \eta^*(z_1(t)) \end{cases}$$

heissen *negativer innerer bzw. äusserer Winkel zwischen I_1 und I_2* .

Bilden I_1 und I_2 in ihrem gemeinsamen Endpunkt einen gewöhnlichen Winkel $\alpha > 0$, so ist durch eine einfache Betrachtung leicht ersichtlich, dass die Winkel (4.2) und (4.3) mit α und $-\alpha$ übereinstimmen.

Das nachstehende Beispiel zeigt, dass im allgemeinen $\underline{\omega}^+(I_1, I_2) \neq |\underline{\omega}^-(I_1, I_2)|$ sein kann. Insbesondere ist dies auch dann möglich, wenn I_1 und I_2 die Bildbogen der Schenkel eines gewöhnlichen Winkels bei einer quasikonformen Abbildung sind. Dasselbe gilt natürlich für $\overline{\omega}^+(I_1, I_2)$ und $\overline{\omega}^-(I_1, I_2)$.

Beispiel 2. Man betrachte den Winkel $0 \leq \arg z \leq \pi$ in der z -Ebene. Bei der quasikonformen Abbildung (2.6), Beispiel 1, besitzen seine Schenkel als Bilder die Bogen

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \{ w \mid \arg w = \sin \log |w| \} \\ \Gamma_2 &= \{ w \mid \arg w = \pi \} \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar zu sehen, dass $|\underline{\omega}^-(\Gamma_1, \Gamma_2)| = \pi - 1$ ist. Um $\underline{\omega}^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ abzuschätzen, wählen wir als Gebiet U die gesamte w -Ebene und führen eine konforme Abbildung f , $f(0) = 0$, von $U - \bar{\Gamma}_1$ auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzte Ebene aus. Die Schlitzgebiete $U - \bar{\Gamma}_1$ und $f(U - \bar{\Gamma}_1)$ werden ferner konform durch einen Zweig des Logarithmus auf die Streifengebiete

$$\begin{aligned} S &= \{ x + iy \mid -\infty < x < \infty, \sin x < y < 2\pi + \sin x \}, \\ S' &= \{ \xi + i\eta \mid -\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < 2\pi \} \end{aligned}$$

bezogen. Durch Zusammensetzung dieser Abbildungen mit f wird eine konforme Abbildung $\zeta = \xi + i\eta$ von S auf S' erklärt. Die Funktion $\eta - y$ ist harmonisch, und da sie auf dem Rande von S nicht kleiner als -1 ist, gilt $\eta(x, \pi) > \pi - 1$.

Andererseits ist die durch

$$\varphi(x + iy) = \eta(x + iy) - \eta(x + iy + 2\pi)$$

definierte Funktion φ auch harmonisch in S , und da $\varphi(x + iy) = 0$ auf dem Rand von S ist, verschwindet φ identisch in S . Die Funktion η hat somit eine Periode 2π , und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta(x, \pi) = \underline{\omega}^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ wird also schon auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ erreicht. Daraus folgt die gewünschte Ungleichung $\underline{\omega}^+(\Gamma_1, \Gamma_2) > |\underline{\omega}^-(\Gamma_1, \Gamma_2)|$.

Um den inneren und den äusseren Winkel in eindeutiger Weise festzulegen, führen wir die nachstehende Definition ein.

Definition 3. Man bezeichne

$$(4.5) \quad \begin{cases} \underline{\omega}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \text{Min}(\underline{\omega}^+(\Gamma_1, \Gamma_2), |\underline{\omega}^-(\Gamma_1, \Gamma_2)|) \\ \bar{\omega}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \text{Max}(\bar{\omega}^+(\Gamma_1, \Gamma_2), |\bar{\omega}^-(\Gamma_1, \Gamma_2)|) \end{cases}$$

und nenne diese Ausdrücke den *inneren bzw. äusseren Winkel zwischen* Γ_1 und Γ_2 .

Ferner ist zu beweisen, dass die Grenzwerte (4.2) und (4.3) von der Wahl des Gebietes U , des Punktes z' bzw. z'' und der Funktion η bzw. η^* unabhängig sind.

Satz 5. Die Winkel (4.2), (4.3) und (4.5) sind eindeutig bestimmt und bleiben invariant bei jeder konformen Abbildung von U .

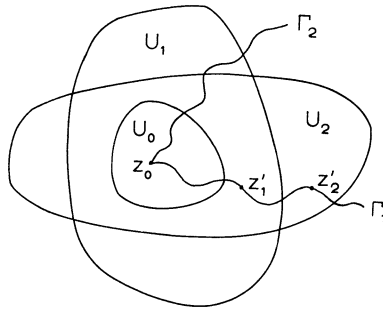


Abb 5

Beweis. Es genügt offenbar, die Winkel (4.2) zu betrachten. U_1 und U_2 seien zwei beliebige Umgebungen von z_0 und $\Gamma_1(z_0, z_1)$, $\Gamma_1(z_0, z_2)$ die zu ihnen gehörigen Schlitze. Ferner sei η_i , $i = 1, 2$, eine in U_i beschränkte harmonische Funktion mit den Randwerten 0 auf $\Gamma_1^+(z_0, z_i')$ und 2π auf $\Gamma_1^-(z_0, z_i')$.

Wir wählen eine Jordanumgebung $U_0 \subset U_1 \cap U_2$ von z_0 , die die Punkte z_1 und z_2 nicht enthält und deren Randkurve dem Bogen Γ_1 nur in einem Punkt begegnet; vgl. Abb. 5. Die Differenz $\eta_2 - \eta_1$ ist dann eine in $U_0 - \bar{\Gamma}_1$ beschränkte harmonische Funktion, die auf den Schlitzufern Γ_1^+ und Γ_1^- verschwindet. Wird $U - \bar{\Gamma}_1$ konform auf den Einheitskreis abgebildet, so ergibt sich durch Anwendung der Poissonschen Formel

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in U}} (\eta_2(z) - \eta_1(z)) = 0,$$

woraus die Behauptungen des Satzes folgen.

4.2. *Verzerrung im allgemeinen Falle.* Es sei G ein Gebiet der z -Ebene und w eine K -quasikonforme Abbildung von G . Man betrachte einen Winkel $\alpha_0 \leq \arg(z - z_0) \leq \alpha_0 + \alpha$, $0 < \alpha < 2\pi$, dessen Scheitelpunkt z_0 in G liegt. Werden seine inneren und äusseren Bildwinkel $\underline{\omega}(\alpha)$ und $\bar{\omega}(\alpha)$ durch (4.2), (4.3) oder (4.5) definiert, so lassen alle in § 3 gewonnenen Resultate sich auf diesen Fall übertragen.

Diese Ergebnisse können auch verallgemeinert werden auf den Fall, dass ein Jordanbogenpaar (4.1) in der z -Ebene gegeben ist. Bezeichnet man mit $\underline{\alpha}$ und $\bar{\alpha}$ die Winkel (4.2), (4.3) bzw. (4.5) und mit $\underline{\omega}$ und $\bar{\omega}$ die entsprechenden Bildwinkel, so besteht (3.10) in der Form

$$(4.6) \quad 4 \overline{\arcsin}(\varphi_K^{-1}(\sin |\underline{\alpha}|/4)) \leq |\underline{\omega}| \leq |\bar{\omega}| \leq 4 \overline{\arcsin}(\varphi_K(\sin |\bar{\alpha}|/4)).$$

Für jedes Bogenpaar mit $\underline{\alpha} > 0$ gilt nach (4.6)

$$\underline{\omega} / \underline{\alpha} \geq \underline{\omega} / \bar{\alpha} > 0.$$

Für $\bar{\alpha} > 0$ kann das Verhältnis $\underline{\omega} / \bar{\alpha}$ dagegen verschwinden, da hierbei $\underline{\alpha} = 0$ und also auch $\underline{\omega} = 0$ möglich ist. Schliesslich können die Formeln (3.11) und (3.15) in dem betrachteten Falle folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\underline{\omega} / \bar{\alpha} \leq \frac{K^2}{1 + \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}(K^2 - 1)};$$

$$\sup_{0 < \bar{\alpha} < 2\pi} \underline{\omega} / \bar{\alpha} < K^2 \text{ bei jeder Abbildung mit } K > 1.$$

II. DEFINITION EINER QUASIKONFORMEN ABBILDUNG MIT HILFE DER WINKELVERZERRUNG

§ 5. Vorbereitende Betrachtungen

5.1. Bisher haben wir Schranken für die Veränderung der in § 4 definierten verallgemeinerten Winkel bei einer quasikonformen Abbildung hergeleitet. Im vorliegenden Kapitel wird das Umkehrproblem untersucht, inwiefern die Beschränktheit der Winkelverzerrung zur Charakterisierung der Quasikonformität eines Homöomorphismus ausreicht. Zur genauen Formulierung dieses Problems führen wir zunächst einige Hilfsbetrachtungen aus.

Es sei bemerkt, dass ein Homöomorphismus auch dann keine quasikonforme Abbildung zu sein braucht, wenn die Winkel sich in fast allen Punkten erhalten. Als Beispiel dafür dient die in [6] IV. 2.2 dargestellte Abbildung, die die ASG-Bedingung nicht erfüllt und also auch nicht quasikonform sein kann. Daher ist eine Einschränkung der Winkelveränderung in fast allen Punkten offenbar nicht hinreichend für die Quasikonformität, sondern auch die Verzerrung in der Ausnahmemenge muss beachtet werden.

Zunächst werden wir einige Verzerrungsfunktionen einführen.

5.2. *Die Verzerrungsfunktionen φ und ϑ .* Es sei w ein orientierungserhaltender Homöomorphismus eines Gebiets G der z -Ebene auf ein Gebiet G' der w -Ebene. Ein *Winkелеlement* $(z_0, \alpha | \beta)$ besteht aus einem Punkt $z_0 \in G$ und aus zwei gleich grossen Winkeln $\beta \leq \arg(z - z_0) \leq \beta + \alpha$, $\beta + \pi - \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta + \pi$, wobei $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ ist; der Kürze halber bezeichnen wir diese Winkel mit α_1 und α_2 . Wir definieren eine Verzerrungsfunktion φ durch

$$(5.1) \quad \varphi(z_0, \alpha | \beta) = \frac{\text{Min}(\underline{\omega}^+(\alpha_1), |\underline{\omega}^-(\alpha_2)|)}{\alpha},$$

worin $\underline{\omega}^+(\alpha_1)$ und $\underline{\omega}^-(\alpha_2)$ der positive bzw. negative innere Bildwinkel von α_1 bzw. α_2 sind (vgl. (4.2) und (4.3)).

Die in Aussicht gestellte Definition der Quasikonformität kann unter Anwendung dieser Funktion ausgedrückt werden. Zur Vereinfachung gewisser später vorkommender Abschätzungen empfiehlt es sich jedoch, die Winkelverzerrung noch auf eine andere Weise zu charakterisieren. Zu diesem Zweck werden die Bildwinkel von α_1 und α_2 durch das folgende Verfahren definiert, das von dem in § 4 benutzten etwas abweicht.

Es seien $\Gamma_1, \Gamma, \Gamma'$ und Γ_2 die w -Bilder der Schenkel $\arg(z - z_0) = \beta, \beta + \alpha, \beta + \pi - \alpha$ bzw. $\beta + \pi$. Man wähle einen in G gelegenen offenen Halbkreis $\{z | 0 < |z - z_0| < \varrho, \beta < \arg(z - z_0) < \beta + \pi\}$; sein Bildgebiet sei mit V bezeichnet. Ferner benenne man mit w_0, p und q die Bildpunkte von $z_0, z_0 + \varrho e^{i\beta}$ bzw. $z_0 + \varrho e^{i(\beta+\pi)}$ und mit $\Gamma_1(w_0, p), \Gamma_2(w_0, q)$ die Bildbogen der offenen Strecken $\{z | z = z_0 + r e^{i\beta}, 0 < r < \varrho\}$ und $\{z | z = z_0 + r e^{i(\beta+\pi)}, 0 < r < \varrho\}$. Ist η eine in V beschränkte harmonische Funktion, die auf $\Gamma_1(w_0, p)$ und $\Gamma_2(w_0, q)$ die Werte 0 bzw. π annimmt, so werden die Bildwinkel von α_1 und α_2 als Grenzwerte

$$(5.2) \quad \begin{cases} \underline{\omega}[\alpha_1] = \liminf_{r \rightarrow 0} \eta(w(z_0 + r e^{i(\beta+\alpha)})) \\ \underline{\omega}[\alpha_2] = \pi - \limsup_{r \rightarrow 0} \eta(w(z_0 + r e^{i(\beta+\pi-\alpha)})) \end{cases}$$

erklärt. Zum Unterschied von den früheren Bezeichnungen werden hier eckige Klammern benutzt, während die jetzt unnötigen + - und - Zeichen weggelassen werden.

Eine Funktion η obiger Art ist das Argument einer solchen konformen Abbildung $\zeta = \xi + i\eta$ von V , die die Randbogen $\Gamma_1(w_0, p)$ und $\Gamma_2(w_0, q)$ auf gewisse Strecken $0 < \xi < \xi_0, \xi'_0 < \xi < 0$ der reellen Achse überführt. Da in (4.2) bzw. (4.3) ein aufgeschlitzter Schenkel des betrachteten Winkels auf eine Strecke bezogen wird, brauchen die Winkel $\underline{\omega}^+(\alpha_1)$ und $|\underline{\omega}^-(\alpha_2)|$ mit den entsprechenden von (5.2) nicht übereinzustimmen. Die Eindeutigkeit der Winkel (5.2) kann ganz analog durch den Beweis von Satz 5 gezeigt werden; sie sind also unabhängig von der Wahl des Halbkreises und der Funktion η .

Die gewünschte Verzerrungsfunktion wird nun durch die Formel

$$(5.3) \quad \vartheta(z_0, \alpha | \beta) = \frac{\text{Min}(\underline{\omega}[\alpha_1], \underline{\omega}[\alpha_2])}{\alpha}$$

definiert.

5.3. *Gegenseitige Abhängigkeit der Funktionen φ und ϑ .* Aus technischen Gründen werden wir zunächst die Funktion ϑ zur Charakterisierung der Quasikonformität benutzen. Die Definition der Winkel (4.2) bzw. (4.3) ist jedoch natürlicher als die der Winkel (5.2), weil dann ein Schenkel geradlinig bezogen wird, und wir wollen deshalb unsere Resultate auch mit Hilfe der Funktion φ ausdrücken. Zu diesem Zweck beweisen wir die zwischen den Funktionen ϑ und φ bestehende Ungleichung

$$(5.4) \quad \vartheta(z_0, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{2} \varphi(z_0, \alpha | \beta).$$

Um (5.4) zu begründen, zeigen wir, dass $\underline{\omega}[\alpha_1] \geq \frac{1}{2} \underline{\omega}^+(x_1)$ und $\underline{\omega}[\alpha_2] \geq \frac{1}{2} |\underline{\omega}^-(x_2)|$ ist. Es genügt offensichtlich, z.B. die erstere dieser Beziehungen zu beweisen.

Nach dem in 5.2. Gesagten kann ϱ bei der Definition von $\underline{\omega}[\alpha_1]$ so klein gewählt werden, dass der Kreis $|z| < \varrho$ in G liegt. Das Bildgebiet dieses Kreises lässt sich dann als Gebiet U in 4.1 wählen. Man bezeichne mit ζ eine konforme Abbildung von $U - \overline{\Gamma_1(w_0, p)}$ auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzte ζ -Ebene mit $\zeta(w_0) = 0$, $\zeta(q) = \infty$; diese wird auf die in 4.1 dargestellte Weise zur Definition von $\underline{\omega}^+(x_1)$ benutzt. Mit Rücksicht auf die Definition von $\underline{\omega}[\alpha_1]$ ist noch eine konforme Abbildung f , $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$, des Gebietes $\zeta(V)$ auf die

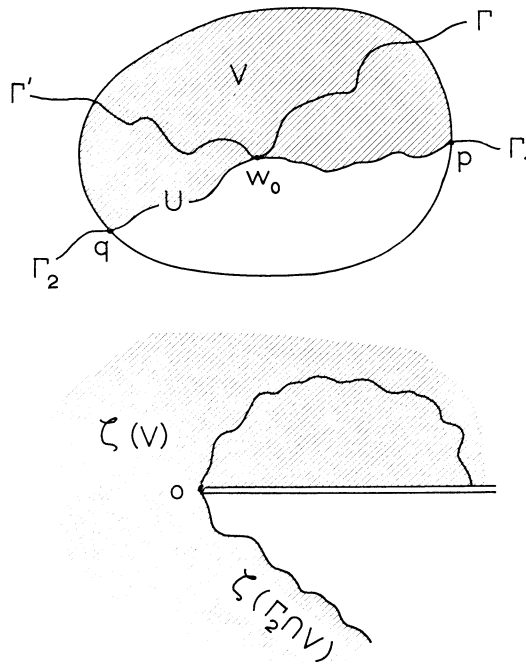


Abb 6.

obere Halbebene zu konstruieren; vgl. Abb. 6. Auf dem Rande von $\zeta(V)$ ist die harmonische Funktion $\arg f(\zeta) - \frac{1}{2} \arg \zeta$ nichtnegativ für $\zeta \neq 0, \infty$. Nach dem verallgemeinerten Minimumprinzip gilt dann dasselbe auch in $\zeta(V)$, woraus die gewünschte Behauptung folgt.

5.4. *Hilfsmittel der reellen Analysis.* Für späteren Gebrauch werden hier einige masstheoretische Begriffe und Sätze aufgezählt.

Als Verallgemeinerung des Lebesgueschen Längenmasses wird für ebene Mengen das Hausdorffsche Längenmass auf folgende Weise definiert: Es sei E eine Punktmenge der endlichen Ebene. Zu jedem $\delta > 0$ betrachte man alle abzählbaren Überdeckungen \mathcal{U} von E mit offenen Mengen U , von denen jede einen Durchmesser $d(U) < \delta$ besitzt. Man setze

$$\Lambda(E, \delta) = \inf \sum_{U \in \mathcal{U}} d(U)$$

und definiere das *äussere Längenmass* von E als die obere Grenze

$$\Lambda^*(E) = \sup_{\delta > 0} \Lambda(E, \delta).$$

Liegt E auf einer Geraden, so stimmt $\Lambda^*(E)$ mit dem Lebesgueschen äusseren Längenmass $l^*(E)$ überein. Die Mengenfunktion Λ^* ist ein reguläres äusseres Mass im Sinne von Carathéodory. Wie üblich, wird eine Menge A Λ^* -messbar genannt, soweit die Gleichheit $\Lambda^*(E) = \Lambda^*(E \cap A) + \Lambda^*(E - A)$ für jede Punktmenge E der endlichen Ebene besteht. Für ein Λ^* -messbares A wird $\Lambda^*(A)$ als $\Lambda(A)$ bezeichnet und das Längenmass von A genannt.

Eine Menge heisst σ -endlich, falls sie eine Vereinigung abzählbar vieler Mengen von endlichem äusserem Längenmass ist. Für diese Mengen gilt folgender Hilfssatz (vgl. [6], s. 121).

Lemma 4. Ist E σ -endlich, so enthält die horizontale Gerade $y = \eta$ für fast alle η höchstens abzählbar viele Punkte von E .

Ferner werden wir in § 7 den wohlbekannten *Satz von Fubini* in folgender Form benutzen:

Ist E eine in bezug auf das Flächenmass messbare Menge, so ist der Durchschnitt E_y von E und der horizontalen Geraden mit der Ordinate y für fast alle y messbar in bezug auf das Längenmass. Ferner ist $l(E_y)$ eine messbare Funktion von y , und es gilt

$$m(E) = \int_{-\infty}^{\infty} l(E_y) dy.$$

§ 6. Definition der Quasikonformität mit Hilfe der Verzerrungsfunktion ϑ

6.1. *Formulierung der Definition.* Durch Anwendung der Resultate des vorigen Paragraphen werden die quasikonformen Abbildungen jetzt auf folgende Weise erklärt.

Satz 6. Es sei w ein orientierungserhaltender Homöomorphismus eines Gebietes G der endlichen z -Ebene auf ein Gebiet G' der endlichen w -Ebene. Die Abbildung w ist quasikonform, wenn es zwei Konstanten α und C , $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $1 \leq C < \infty$, derart gibt, dass die zu w gehörige Verzerrungsfunktion ϑ für zwei einander orthogonale Richtungen $\beta = \beta_0$ und $\beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\pi$ folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1°. $\vartheta(z, \alpha | \beta) > 0$ für jedes $z \in G$ mit möglicher Ausnahme einer σ -endlichen Menge.

2°. $\vartheta(z, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{C}$ für fast alle $z \in G$.

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes übergehen, stellen wir einige Hilfsbetrachtungen an.

6.2. *Funktionen σ und $dm(R_y''(y))/dy$.* Es sei $w : G \rightarrow G'$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und $R = R(0, 1, 1 + ia, ia)$, $\bar{R} \subset G$, ein achsenparalleles Rechteck. Das oberhalb der Geraden $\text{Im } z = y$, $0 \leq y < a$, liegende Rechteck $R(iy, 1 + iy, 1 + ia, ia)$ sei mit $R(y)$ und sein w -Bild mit $R'(y)$ bezeichnet. Ferner sei ζ_y die konforme Abbildung von $R'(y)$ auf das Rechteck

$$R_y''(y) = R\left(0, 1, 1 + \frac{i}{M(R'(y))}, \frac{i}{M(R'(y))}\right)$$

der ζ -Ebene, wobei $M(R'(y))$ der Modul von $R'(y)$ ist. Wir bezeichnen allgemeiner mit $R_y''(t)$ das ζ_y -Bild von $R'(t)$, $y \leq t < a$. Die Indexe in ζ_y und $R_y''(t)$ beziehen sich also auf dasjenige Rechteck $R(y)$ der z -Ebene, das durch $\zeta_y \circ w$ auf ein Rechteck bezogen ist.

Als monoton abnehmende Funktion besitzt der Flächeninhalt $m(R_y''(y))$ für fast jedes y , $0 < y < a$, eine endliche Ableitung

$$(6.1) \quad \frac{d}{dy} m(R_y''(y)) = \lim_{t \rightarrow y} \frac{m(R_t''(t)) - m(R_y''(y))}{t - y}.$$

Wir beweisen folgenden Hilfssatz, auf dem der Beweis des Satzes 6 teilweise beruht.

Lemma 5. Bezeichnet man

$$(6.2) \quad \sigma(y) = \limsup_{t \rightarrow y} \frac{m(R_y''(y)) - m(R_t''(t))}{t - y},$$

so gilt für fast alle y , $0 < y < a$, die Beziehung $\sigma(y) \leq -\frac{d}{dy} m(R''_y(y))$.

Beweis. Es sei y_0 ein beliebiger y -Wert, für den die endliche Ableitung (6.1) existiert, und $y_1 > y_0$, $y_1 < a$. Die oben erklärten Funktionen ζ_{y_0} und ζ_{y_1} bilden das Viereck $R'(y_1)$ auf das Viereck $R''_{y_0}(y_1)$ bzw. auf das Rechteck $R''_{y_1}(y_1)$ konform ab; vgl. Abb. 7. Die Moduln $M(R''_{y_0}(y_1))$ und $M(R''_{y_1}(y_1))$ sind also gleich gross, und nach der Gleichung (1.2) ergibt sich mit $\varrho = 1$ die Abschätzung $m(R''_{y_0}(y_1)) \leq m(R''_{y_1}(y_1))$. Es gilt also

$$\begin{aligned} m(R''_{y_0}(y_0) - R''_{y_0}(y_1)) &= m(R''_{y_0}(y_0)) - m(R''_{y_0}(y_1)) \\ &\leq m(R''_{y_0}(y_0)) - m(R''_{y_1}(y_1)), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

6.3. *Approximation der Verzerrungsfunktion ϑ .* Wir betrachten die Menge aller Winkelelemente $(z, \alpha | 0)$, $z \in R$, mit einem festen Winkel α , $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen definieren wir die Funktionen ϑ_n^+ und ϑ_n^- , $n = 1, 2, \dots$, durch die Ausdrücke

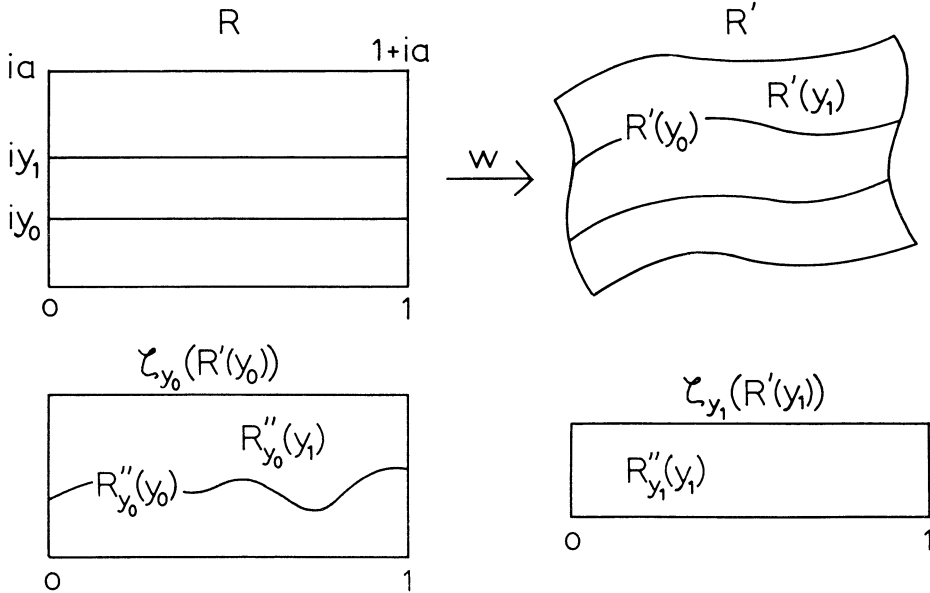


Abb. 7.

$$(6.3) \quad \vartheta_n^+(z, \alpha) = \inf_{0 < r \leq 1/n} \frac{\arg(\zeta_y(w(z + re^{i\alpha})) - \zeta_y(w(z)))}{\alpha}$$

und

$$(6.3)' \quad \vartheta_n^-(z, \alpha) = \inf_{0 < r \leq 1/n} \frac{\pi - \arg(\vartheta_y(w(z + re^{i(\pi-\alpha)})) - \vartheta_y(w(z)))}{\alpha}$$

für $z \in \bar{R}_n = \{z = x + iy \mid \cos \alpha/n \leq x \leq 1 - \cos \alpha/n, \ 0 \leq y \leq a - \sin \alpha/n\}$.

Setzt man

$$(6.4) \quad \vartheta_n(z, \alpha) = \begin{cases} \text{Min}(\vartheta_n^+(z, \alpha), \vartheta_n^-(z, \alpha)) & \text{für } z \in \bar{R}_n \\ 0 & \text{für } z \in R - \bar{R}_n, \end{cases}$$

so konvergiert ϑ_n als monoton zunehmende Folge überall in R gegen eine Grenzfunktion ϑ ,

$$(6.5) \quad \vartheta(z, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(z, \alpha).$$

Da $\vartheta(z, \alpha \mid 0)$ nicht von R abhängt, ist die Gleichung

$$(6.6) \quad \vartheta(z, \alpha) = \vartheta(z, \alpha \mid 0)$$

für jedes $z \in R$ gültig; von nun an werden wir die kürzere Bezeichnung $\vartheta(z, \alpha)$ anwenden.

Man betrachte eine in R gelegene horizontale Strecke $I_0 = \{z \mid 0 < x < 1, \ y = y_0\}$. Ihr Bild bei der zusammengesetzten Abbildung $\zeta_{y_0} \circ w$ ist die Seite $\zeta_{y_0}(w(I)) = \{\zeta = \xi + i\eta \mid 0 < \xi < 1, \ \eta = 0\}$ von $R''_{y_0}(y_0)$; diese Strecke sei mit I''_0 bezeichnet.

Wir konstruieren die Mengen

$$(6.7) \quad H_{ns} = \left\{ z \mid z \in I_0 \cap \bar{R}_n, \ \vartheta_n(z, \alpha) \geq \frac{1}{s} \right\},$$

worin s eine positive Zahl ist; im Falle $I_0 \cap R_n = \emptyset$ sei auch $H_{ns} = \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von $\zeta_{y_0} \circ w$ in $\bar{R}(y_0)$ ist H_{ns} abgeschlossen. Da sowohl $\vartheta_n(z, \alpha)$ als R_n mit n nicht abnehmen, gilt $H_{n_1s} \supset H_{n_2s}$ für $n_1 > n_2$. Nach (6.7) enthält die Borelsche Menge

$$(6.8) \quad H_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{ns} = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{ns}$$

alle Punkte von I_0 , für die $\vartheta(z, \alpha) > 1/s$ ist. Gemäss der früheren Schreibweise bezeichnen wir die $\zeta_{y_0} \circ w$ -Bilder von H_{ns} und H_s mit H''_{ns} und H''_s . Da $\zeta_{y_0} \circ w$ in $\bar{R}(y_0)$ stetig ist, so ist auch H''_{ns} abgeschlossen und H''_s also Borelsch.

§ 7. Beweis von Satz 6

7.1. Wir gehen jetzt zum Beweis des Satzes 6 über. Ausser den in den vorigen Paragraphen entwickelten Hilfsmitteln werden wir ein Resultat von Gehring und Väisälä [6], S. 183, benutzen, nachdem die Quasikonformität schon daraus folgt, dass die Dilatation aller achsenparallelen Rechtecke beschränkt ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir in dem Satz 6 $\beta_0 = 0$ wählen. Wie in 6.2 betrachten wir ein achsenparalleles Rechteck, das wir durch eine Ähnlichkeitstransformation in $R = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1, 0 < y < a\}$ überführen; die horizontale Strecke $\{z = x + iy \mid 0 < x < 1, y = y_0\}$ sei wieder mit I_0 bezeichnet. Diejenige Teilmenge von I_0 , in der $\vartheta(z, \alpha)$ verschwindet, sei H_0 .

Aus den Annahmen von Satz 6 folgt in Verbindung mit Lemma 4, Lemma 5 und dem Satz von Fubini, dass die folgenden Bedingungen für fast alle $y_0, 0 < y_0 < a$, erfüllt sind:

- A. $\sigma(y_0) < \infty$.
- B. Die Menge H_0 ist höchstens abzählbar.
- C. $\vartheta(z, \alpha \mid 0) = \vartheta(z, \alpha) \geq \frac{1}{C}$ für fast alle $z \in I_0$.

Wir fassen ein festes y_0 ins Auge und bezeichnen mit $f : I_0 \rightarrow I_0''$ den durch $f(x) = \zeta_{y_0}(w(x + iy_0))$ definierten Homöomorphismus, in dem ζ_{y_0} die in 6.2 eingeführte konforme Abbildung ist.

Der Beweis des Satzes 6 zerfällt in drei Teile. Der erste Teil ist eine Folgerung der obigen Bedingung A, die von den Voraussetzungen 1° und 2° des Satzes unabhängig ist. Wir nehmen also an, dass diese Bedingung für y_0 besteht und beweisen folgendes:

Teil 1. Ist $E \subset I_0$ eine messbare Menge, so gilt für jedes $s > 0$ die Ungleichung

$$(7.1) \quad (l^*(E'' \cap H_s''))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}} \sigma(y_0) l(E),$$

in der E'' die Bildmenge von E bei der Abbildung f ist.

Beweis. Wegen (6.8) wird (7.1) bewiesen, wenn wir die Gültigkeit von

$$(7.2) \quad (l^*(E'' \cap H_{ns}''))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}} \sigma(y_0) l(E)$$

für jedes ganzzahlige n begründen.

Zu diesem Zweck überdecken wir für festes n die Menge $E \cap H_{ns}$ mit abzählbar vielen punktfremden Intervallen $O_m \subset I_0$, $m = 1, 2, \dots$. Die Länge der Vereinigungsmenge $O = \bigcup_{m=1}^{\infty} O_m$ befriedigt dann die Ungleichung

$$(7.3) \quad l(E \cap H_{ns}) < l(O).$$

Für die Bildmengen $f(O_m) = O''_m$, $f(O) = O''$, gilt $E'' \cap H''_{ns} \subset O'' \cap H''_{ns}$ und also

$$(7.4) \quad l^*(E'' \cap H''_{ns}) \leq l(O'' \cap H''_{ns}) = \sum_{m=1}^{\infty} l(O''_m \cap H''_{ns}).$$

Um (7.2) zu gewinnen, wählen wir zunächst eine beliebige ganze Zahl $M > 0$ und schätzen die Summe $\sum_{m=1}^M l(O''_m \cap H''_{ns})$ nach oben ab.

Es sei λ eine positive Zahl mit der Eigenschaft $y_0 + \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tg} \alpha \leq a$. Wir bezeichnen mit $T(\lambda)$ das von den horizontalen Geraden $y = y_0$, $y = y_0 + \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tg} \alpha$ getrennte offene Teilrechteck von R und mit $T''(\lambda)$ das Bildviereck $\zeta_{y_0}(w(T(\lambda)))$. Im folgenden wird ein so kleines λ betrachtet, bei dem die Ungleichungen

$$(7.5) \quad \lambda \leq \frac{2}{n} \cos \alpha$$

$$(7.5)' \quad \lambda \leq \min_{m \leq M} l(O_m)$$

bestehen.

Wir zerlegen jedes Intervall O_m , $m = 1, 2, \dots, M$, in eine endliche Anzahl k_m von gleich grossen Teilintervallen, deren Länge $l(O_m)/k_m$ die Bedingung

$$(7.6) \quad \frac{1}{2} \lambda < \frac{l(O_m)}{k_m} \leq \lambda$$

erfüllt. Diese Intervalle werden mit Q_ν , $\nu = 1, 2, \dots, N$, $N = \sum_{m=1}^M k_m$, bezeichnet; nach (7.6) gilt also

$$(7.7) \quad N \frac{\lambda}{2} < \sum_{\nu=1}^N l(Q_\nu) \leq l(O).$$

Die Gesamtlänge der Mengen $Q''_\nu \cap H''_{ns}$ erfüllt die Gleichung

$$(7.8) \quad \sum_{\nu=1}^N l(Q''_\nu \cap H''_{ns}) = \sum_{m=1}^M l(O''_m \cap H''_{ns}).$$

Wir betrachten nun diejenigen abgeschlossenen Mengen $\overline{Q}_v'' \cap H_{ns}''$, die nicht leer sind, und bezeichnen mit $x_1^v + iy_0$ bzw. $x_2^v + iy_0$ denjenigen Punkt der Urbildmenge $\overline{Q}_v \cap H_{ns}$, der den kleinsten bzw. grössten reellen Teil hat. Die Bildpunkte $\xi_1^v = f(x_1^v)$, $\xi_2^v = f(x_2^v)$ sind dann die äussersten Punkte von $\overline{Q}_v'' \cap H_{ns}''$, und es gilt

$$(7.9) \quad \xi_2^v - \xi_1^v \geq l(\overline{Q}_v'' \cap H_{ns}'')$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Abschätzung von $\sum_{m=1}^M l(O_m'' \cap H_{ns}'')$ über und betrachten diejenigen gleichschenkligen offenen Dreiecke D_n mit dem Basiswinkel α , die die Strecken (x_1^v, x_2^v) als Basis haben; vgl. Abb. 8. Wegen $x_2^v - x_1^v \leq l(Q_v) \leq \lambda$ und der Ungleichungen (7.5), (7.5)' gilt dann

$$(7.10) \quad \cup D_v \subset T(\lambda), \quad \cup D_v'' \subset T''(\lambda),$$

wobei D_v'' das Bildgebiet $\zeta_{y_0}(w(D_v))$ von D_v ist.

Jedes Gebiet D_v'' enthält nach der Definition von H_{ns} ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis (ξ_1^v, ξ_2^v) und mit dem Basiswinkel α/s . Besteht $\overline{Q}_v \cap H_{ns}$ aus höchstens einem Punkt, so setzen wir $\xi_2^v - \xi_1^v = 0$ und erhalten somit unter Berücksichtigung der Beziehungen (7.8), (7.9), (7.10) und der Schwarzschen Ungleichung die für jedes die Bedingungen (7.5), (7.5)' erfüllendes $\lambda > 0$ gültige Abschätzung

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \frac{m(T''(\lambda))}{m(T(\lambda))} &> \frac{\sum_{v=1}^N m(D_v'')}{m(T(\lambda))} \geq \frac{1}{2} \frac{\sum_v (\xi_2^v - \xi_1^v)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}}{\lambda \operatorname{tg} \alpha} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_v (\xi_2^v - \xi_1^v) \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}}{N \lambda \operatorname{tg} \alpha} \geq \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_v l(Q_v'' \cap H_{ns}'') \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}}{N \lambda \operatorname{tg} \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{m=1}^M l(O_m'' \cap H_{ns}'') \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}}{N \lambda \operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Nach (7.7) ist aber $N \frac{\lambda}{2} < l(O)$, und daher ergibt sich durch $\lambda \rightarrow 0$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{m=1}^M l(O_m'' \cap H_{ns}'') \right)^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}} \sigma(y_0) l(O).$$

Dies gilt für jedes M , woraus wegen (7.4)

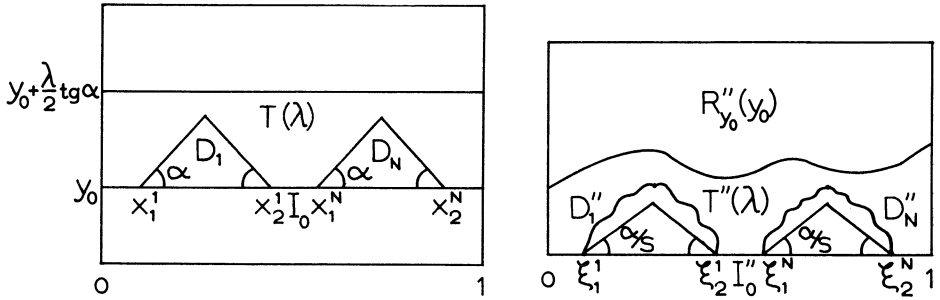


Abb. 8.

$$(l^*(E'' \cap H''_{ns}))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}} \sigma(y_0) l(O)$$

folgt.

Da hier $O \supset E \cap H_{ns}$ beliebig ist, besteht die Abschätzung (7.2), und damit ist Teil 1 bewiesen.

7.2. Aus der Bedingung B folgt, dass auch die Menge $f(H_0) = H''_0$ abzählbar und also vom Längenmass Null ist. Wegen $I''_0 = (\bigcup_{m=1}^{\infty} H''_m) \cup H''_0$ gilt dann $1 = l(I''_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} l(H''_s)$.

Von der Beziehung (7.1) ausgehend, zeigen wir nun mit Hilfe der Bedingungen B und C , dass $\sigma(y)$ für fast alle $0 < y < a$ oberhalb einer positiven Konstante liegt.

Teil 2. Sind alle drei Bedingungen A , B und C von 7.1 für y_0 erfüllt, so befriedigt σ die Abschätzung

$$(7.12) \quad \sigma(y_0) \geq \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}}{4 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f : I_0 \rightarrow I''_0$ nullmengentreu ist. Zu diesem Zweck wähle man in (7.1) $l(E) = 0$. Dann ist $l^*(E'' \cap H''_s) = 0$ für jedes $s > 0$, und wegen $l(I''_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} l(H''_s)$ gilt $l^*(E'') = 0$.

Für jedes messbare $E \subset I_0$ ist die Bildmenge E'' also messbar, und der Bedingung C gemäss gilt für jedes $s > C$

$$(l(E''))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}} \sigma(y_0) l(E).$$

Wählt man hier speziell $E = I_0$, so ist $l(E) = l(E'') = 1$, woraus folgt

$$\sigma(y_0) \geq \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{s}}{4 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Da $s > C$ beliebig gewählt werden kann, ergibt sich hieraus die Behauptung.

Normiert man das zu betrachtende Rechteck R durch eine Ähnlichkeitstransformation derart, dass seine Ecken in den Punkten 0 , $1/a$, $1/a + i$ und i liegen, so kann die dem oberen Limes $\sigma(y)$ entsprechende Funktion $\sigma(x)$ für $0 < x < 1/a$ durch das analoge Verfahren erklärt werden. Da die Voraussetzungen 1° und 2° des Satzes 6 auch für $\beta = \frac{1}{2} \pi$ gelten, schliesst man wie oben, dass

$$(7.12)' \quad \sigma(x) \geq \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}}{4 \operatorname{tg} \alpha}$$

für fast alle x , $0 < x < 1/a$, ist.

Als Abschluss des Beweises zeigen wir, dass der Modul des w -Bildes R' von R mit Hilfe der Ungleichungen (7.12) und (7.12)' nach oben bzw. nach unten abgeschätzt werden kann.

Teil 3. Unter den Bedingungen des Satzes 6 gilt die Doppelungleichung

$$(7.13) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}}{4 \operatorname{tg} \alpha} M(R) \leq M(R') \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}} M(R).$$

Aus dieser für jedes achsenparallele Rechteck R , $\bar{R} \subset G$, gültigen Abschätzung folgt schliesslich die Quasikonformität von w .

Beweis. Um eine obere Abschätzung für $M(R')$ zu finden, normieren wir R wie in 7.1, so dass seine Ecken in den Punkten 0 , 1 , $1 + ia$ und ia liegen. Dann gilt (7.12), und nach Lemma 5 ist also

$$-\frac{d}{dy} m(R_y''(y)) \geq \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}}{4 \operatorname{tg} \alpha}$$

für fast alle y , $0 < y < a$. Durch Integration erhält man daraus

$$m(R_0''(0)) \geq \int_0^a \left(-\frac{d}{dy} m(R_y''(y)) \right) dy \geq a \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}}{4 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Hier ist $a = 1/M(R)$, und aus der Konformität der Abbildung ζ_0 folgt, dass $m(R_0''(0)) = 1/M(R')$ ist. Es ergibt sich also

$$(7.14) \quad M(R') \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}} M(R).$$

Für die untere Abschätzung in (7.13) normiere man das Rechteck R so, dass seine Höhe gleich Eins ist. Dann gilt (7.12)', und das obige Verfahren kann mit x an Stelle von y wiederholt werden. Dies bedeutet, dass $M(R)$ und $M(R')$ in (7.14) durch $1/M(R)$ bzw. $1/M(R')$ ersetzt werden können. Man erhält dadurch die linke Seite der Doppelungleichung (7.13).

Die Quasikonformität von w folgt nun aus dem Satz IV. 3.4 von [6].

§ 8. Die obere Grenze der maximalen Dilatation für die Abbildungsklasse von Satz 6

8.1. Die Resultate der §§ 6–7 können noch dadurch verschärft werden, dass man eine von α und C abhängige obere Grenze für die maximale Dilatation der betreffenden Abbildung w angibt. In der Tat folgt aus (7.13) unter Berücksichtigung des Satzes IV. 3.4 von [6], dass w K -quasikonform ist mit

$$K = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}} + \sqrt{\left(\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}} \right)^2 - 1},$$

aber diese Schranke ist nicht kleinstmöglich, wie schon aus dem Beweis des Satzes 6 hervorgeht. Im folgenden Satz wird die genaue Schranke gegeben.

Satz 7. Erfüllt ein orientierungserhaltender Homöomorphismus w die Bedingungen von Satz 6 für ein $C \geq 1$, so ist seine maximale Dilatation höchstens gleich dem Ausdruck

$$(8.1) \quad D(C, \alpha) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{C} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C} (1 + \operatorname{tg} \alpha)} & \text{für } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{C}} & \text{für } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Diese Schranke kann erreicht werden.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt die Ungleichung

$$(8.2) \quad \vartheta(z, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{C}$$

für $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{1}{2} \pi$ fast überall in G und also auch in fast allen regulären Punkten von w . Wir betrachten einen solchen Punkt z_0 , den wir der Einfachheit halber als Nullpunkt wählen. Ferner können wir $w(z) = Dx + iy + o(z)$ annehmen, wobei D der Dilatationsquotient von w in $z = 0$ ist.

Aus der analytischen Definition der Quasikonformität folgt, dass die obere Grenze der maximalen Dilatation von w gleich dem grösstmöglichen Wert von D ist. Um dies zu bestimmen, betrachten wir die affine Abbildung f , $f(z) = Dx + iy$, und suchen diejenige β_0 -Richtung, für welche die kleinere der Zahlen $\vartheta(0, \alpha | \beta_0)$, $\vartheta(0, \alpha | \beta_0 + \frac{1}{2} \pi)$, die für w und f übereinstimmen, am grössten ist. Der maximale D -Wert lässt sich dann aus der Bedingung (8.2) für $\beta = \beta_0$ und $\beta = \beta_0 + \frac{1}{2} \pi$ berechnen.

Wegen der Symmetrie ist es dem Obigen äquivalent, um eine solche Richtung β , $0 \leq \beta \leq \pi/4$, zu suchen, für die der kleinste der Bildwinkel von $\beta - \alpha \leq \arg z \leq \beta$, $\beta \leq \arg z \leq \beta + \alpha$, $\frac{1}{2} \pi + \beta - \alpha \leq \arg z \leq \frac{1}{2} \pi + \beta$ und $\frac{1}{2} \pi + \beta \leq \arg z \leq \frac{1}{2} \pi + \beta + \alpha$ maximal ist. Aus der stückweisen Monotonie der Winkelableitung

$$(8.3) \quad \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{D}{D^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

¹⁾ Dieser Ausdruck ist reell für jedes $C \geq 1$, und wegen der Monotonie gilt $D(C, \alpha) \geq 1$ dann und nur dann, wenn $C \geq 1$ ist. Ferner strebt $D(C, \alpha)$ gegen den Grenzwert $C + \sqrt{C^2 - 1}$ für $\alpha \rightarrow 0$ (vgl. [6], Satz IV. 3. 4).

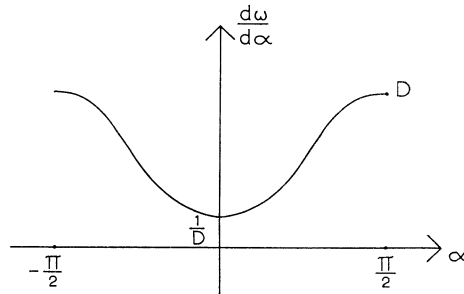


Abb. 9.

geht hervor, dass der erstgenannte kleinst von den obigen Winkeln ist, und er erreicht sein Maximum an der Stelle $\beta = \pi/4$ für $\alpha \leq \pi/4$ und an der Stelle $\beta = 0$ für $\alpha \geq \pi/4$; vgl. Abb. 9. Aus (8.2) ergibt sich in diesen Fällen

$$(8.4) \quad \begin{cases} \overline{\arctan} \frac{1}{D} - \overline{\arctan} \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{D} \right) \geq \frac{\alpha}{C} & \text{für } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ \overline{\arctan} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{D} \right) \geq \frac{\alpha}{C} & \text{für } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2} \pi. \end{cases}$$

Löst man D aus (8.4), so erhält man die behauptete Schranke (8.1), die mit den obigen β -Werten durch eine geeignete Abbildung auch erreicht werden kann. Wegen der Monotonie von (8.4) ist es auch ersichtlich, dass diese Abschätzungen für keinen der Werte $D > D(C, \alpha)$ gelten.

Bemerkung. Die Voraussetzung $C \geq 1$ in der Bedingung $\vartheta(z, \alpha | \beta) \geq 1/C$ ist nicht notwendig für die Quasikonformität von w an sich, aber tatsächlich gilt in jedem regulären Punkt von w für beliebiges β wenigstens eine der Ungleichungen

$$\vartheta(z, \alpha | \beta) \leq 1, \quad \vartheta(z, \alpha | \beta + \frac{1}{2} \pi) \leq 1.$$

§ 9. Folgerungen aus den obigen Sätzen

9.1. *Ableitungen von φ .* Mit festem β lassen wir nun α in (5.1) gegen Null streben und bezeichnen die betreffende obere und untere Limesfunktion mit $\overline{\varphi}$ und $\underline{\varphi}$,

$$(9.1) \quad \overline{\varphi}(z | \beta) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(z, \alpha | \beta), \quad \underline{\varphi}(z | \beta) = \underline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(z, \alpha | \beta).$$

In den Punkten, wo $\bar{\varphi}$ und $\underline{\varphi}$ übereinstimmen, schreiben wir

$$(9.2) \quad \varphi(z | \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(z, \alpha | \beta).$$

Dieser Grenzwert existiert in allen regulären Punkten von w für jedes β und fällt dabei mit $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{\alpha=\beta}$ in (8.3) zusammen, soweit w entsprechenderweise normiert ist. Es besteht

Satz 8. Ist w eine quasikonforme Abbildung von G und gilt für irgendeine Konstante K , $1 \leq K < \infty$, und für jede Richtung β

$$(9.3) \quad \varphi(z | \beta) \geq \frac{1}{K}$$

in fast allen Punkten $z \in G$, so ist w K -quasikonform.

Beweis. Es sei z ein regulärer Punkt von w , für das (9.3) gilt; der Einfachheit halber wählen wir $z = 0$. Normiert man w durch geeignete Ähnlichkeitstransformationen derart, dass $w(z) = Dx + iy + o(z)$ ist, so besteht

$$\varphi(z | \beta) = \frac{D}{D^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta},$$

worin D der Dilatationsquotient im Punkte $z = 0$ ist. Nach (9.3) gilt für jedes β

$$\frac{D}{D^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta} \geq \frac{1}{K}.$$

Setzt man hier $\beta = 0$, so ergibt sich $D \leq K$, woraus die Behauptung nach der analytischen Definition folgt.

9.2. *Definition einer quasikonformen Abbildung mit Hilfe von Funktion φ .* Die Sätze 6 und 7 bleiben auch dann gültig, wenn die darin vorkommende Verzerrungsfunktion ϑ durch φ ersetzt wird.

Satz 9. Es seien G, G' endliche Gebiete und $w : G \rightarrow G'$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Gilt in zwei senkrechten Richtungen $\beta = \beta_0, \beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\pi$, für einen festen Winkel $\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, und für eine Konstante $C, 1 \leq C < \infty$,

1°. $\varphi(z, \alpha | \beta) > 0$ in G mit möglicher Ausnahme einer σ -endlichen Menge,

2°. $\varphi(z, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{C}$ für fast alle $z \in G$,

so ist w quasikonform. Seine maximale Dilatation ist nicht grösser als die Zahl $D(C, \alpha)$ in (8.1).

Beweis. Nach (5.4) ist $\vartheta(z, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{2} \varphi(z, \alpha | \beta)$ in jedem Punkt $z \in G$, und die Bedingungen 1° und 2° von Satz 6 bestehen also mit der Konstante $2C$ an Stelle von C . Die Behauptung über die maximale Dilatation folgt aus der in allen regulären Punkten $z \in G$ gültigen Gleichheit $\vartheta(z, \alpha | \beta) = \varphi(z, \alpha | \beta)$.

Aus den Sätzen 8 und 9 folgt z.B., dass ein Homöomorphismus K -quasikonform ist, falls die Bedingung $\varphi(z, \alpha | \beta) \geq 1/K$ für jedes Winkелеlement $(z, \alpha | \beta)$ mit beliebigen Winkeln α , $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, und β besteht.

Da $D(1, \alpha) = 1$ ist, gilt auch folgendes: *Sind die Bedingungen des Satzes 9 mit $C = 1$ erfüllt, so ist w konform.* Insbesondere ist also jeder orientierungserhaltende, im gewöhnlichen Sinne (4.5) winkeltreue Homöomorphismus stets konform.

Mit Rücksicht auf die Bemerkung nach Satz 2 erhält man folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Quasikonformität.

Satz 10. Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus $w : G \rightarrow G'$ zwischen den endlichen Gebieten ist genau dann quasikonform, wenn es eine Konstante $C, 1 \leq C < \infty$, derart gibt, dass für zwei Richtungen $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\pi$ und für einen Winkel α , $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, gilt:

$$1^\circ. \varphi(z, \alpha | \beta) > 0 \text{ in } G.$$

$$2^\circ. \varphi(z, \alpha | \beta) \geq \frac{1}{C} \text{ fast überall in } G.$$

Es sei bemerkt, dass die Orthogonalität der angegebenen β -Richtungen in den Sätzen 6 bzw. 9 für die Quasikonformität der betreffenden Abbildung nicht notwendig ist. Dies folgt daraus, dass zwei Scharen von einander parallelen Geraden immer durch eine affine Abbildung senkrecht bezogen werden können. Ferner lassen die Verzerrungsbedingungen sich in diesen Sätzen so formulieren, dass die in den Winkелеlementen vorkommenden Winkel α_1 und α_2 nicht gleich gross sind. In diesen Fällen stimmt die obere Grenze der maximalen Dilatation natürlich nicht mit $D(C, \alpha)$ in (8.1) überein.

9.3. Mit Hilfe der in 9.1 eingeführten Ableitungen $\bar{\varphi}$ und $\underline{\varphi}$ kann die Quasikonformität folgendermassen definiert werden.

Satz 11. Erfüllt ein orientierungserhaltender Homöomorphismus $w : G \rightarrow G'$ für zwei einander orthogonale Richtungen $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\pi$ sowie für eine Konstante $C, 1 \leq C < \infty$, die Bedingungen

1°. $\overline{\varphi}(z | \beta) > 0$ in G mit möglicher Ausnahme einer σ -endlichen Menge,

2°. $\underline{\varphi}(z | \beta) \geq \frac{1}{C}$ fast überall in G ,

so ist $w(C + \sqrt{C^2 - 1})$ -quasikonform.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem des Satzes 6. Man nehme wieder $\beta_0 = 0$ an und bezeichne $\underline{\varphi}(z | 0) = \underline{\varphi}(z)$, $\overline{\varphi}(z | 0) = \overline{\varphi}(z)$. In jedem Punkt, wo $\overline{\varphi}(z) > 0$ ist, ist auch $\varphi(z, \alpha) > 0$ für alle Winkel $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Wäre nämlich $\varphi(z, \alpha_0) = 0$ für irgendein $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}\pi$, so wäre auch $\varphi(z, \alpha) = 0$ für alle $0 < \alpha < \alpha_0$, also $\overline{\varphi}(z) = 0$. Da $\vartheta(z, \alpha) \geq \frac{1}{2}\varphi(z, \alpha)$ ist, gilt die Bedingung 1° des Satzes 6 somit für alle $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Es sei $R = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1, 0 < y < a\}$, $\overline{R} \subset G$, ein achsenparalleles Rechteck. Für beliebiges $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ gilt dann Teil 1 des Beweises von Satz 6 auf fast allen in R gelegenen horizontalen Strecken $I = \{z \mid 0 < x < 1, y = \text{konstant}\}$, für die $\sigma(y)$ endlich ist, d. i. für fast alle $0 < y < a$. Bezeichnet $I_0, y = y_0$, eine solche Strecke mit $l(H''_0) = 1$, so ist die in 7.1 erklärte Funktion $f = \zeta_{y_0} \circ w$ nullmengentreu.

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$(9.4) \quad \underline{\varphi}(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(z, \alpha) \geq \frac{1}{C}$$

in R auf fast allen Strecken I für fast alle $0 < x < 1$; auf I_0 sei auch diese Bedingung erfüllt. Bezeichnet man mit J_0 diejenige Teilmenge von I_0 , in der (9.4) gilt, so ist $l(J_0) = l(I_0) = 1$ und also auch $l(J''_0) = l(I''_0) = 1$. Ist $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$, beliebig angegeben, so gibt es nach (9.4) für jedes $z \in J_0$ einen Winkel $\alpha(z), 0 < \alpha(z) < \delta$, derart, dass $\varphi(z, \alpha) \geq 1/2C$ und also $\vartheta(z, \alpha) \geq 1/4C$ für jedes $\alpha \leq \alpha(z)$ gilt.

Es sei F'' eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von J''_0 . Ihre Urbildmenge $F = f^{-1}(F'')$ ist dann auch abgeschlossen, und die Funktion $\alpha(z)$ erreicht somit ein positives Minimum α_0 in F . Nach (7.1) erhält man für $\alpha = \alpha_0$

$$(l(F'' \cap H''_s))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{s}} \sigma(y_0) l(F).$$

Da f nullmengentreu ist, gilt ferner

$$(l(F''))^2 \leq \frac{4 \operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{s}} \sigma(y_0) l(F)$$

für jedes $s > 4C$, vgl. Beweis von Teil 2 des Satzes 6. Hieraus ergibt sich durch $\delta \rightarrow 0$

$$(l(F''))^2 \leq 16C \sigma(y_0).$$

Diese Abschätzung besteht für jedes $F'' \subset J_0''$, daher ist

$$\sigma(y_0) \geq \frac{1}{16C}.$$

Die entsprechende Ungleichung kann auch für fast alle x_0 , $0 < x_0 < 1$, bewiesen werden, und nach Teil 3 des Beweises von Satz 6 ist w quasikonform.

Es ist noch die Behauptung über die maximale Dilatation von w zu beweisen. Ist z ein regulärer Punkt von w , so kann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Winkel $\alpha_\varepsilon < \pi/4$ derart gewählt werden, dass $\varphi(z, \alpha) \geq 1/(C + \varepsilon)$ für ein beliebig gewähltes $\alpha < \alpha_\varepsilon$ gilt. Hieraus folgt, dass $D(0) \leq D(C + \varepsilon, \alpha)$ ist. Durch $\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich $D(0) \leq C + \sqrt{C^2 - 1}$, wonach w $(C + \sqrt{C^2 - 1})$ -quasikonform ist. Andererseits sieht man mit Hilfe der die Bedingung $\varphi(z | 0) \geq 1/C$ erfüllenden Abbildung $g \circ w \circ g^{-1}$ $w(z) = (C + \sqrt{C^2 - 1})x + iy$, $g(z) = e^{i\pi/4}z$, dass diese Schranke bestmöglich ist.

Literatur

- [1] AGARD, S. B. und GEHRING, F. W.: Angles and quasiconformal mappings. - Proc. London Math. Soc. 3. 14 A, 1965, S. 1—21.
- [2] BERS, L.: On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality. - Trans. Amer. Math. Soc. 84, 1957, S. 78—84.
- [3] GEHRING, F. W. und LEHTO, O.: On the total differentiability of functions of a complex variable. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 272, 1959.
- [4] GRÖTZSCH, H.: Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. - Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 80, 1928, S. 503—507.
- [5] HERSCH, J. und PFLUGER, A.: Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques. - C. R. Acad. Sci. Paris 234, 1952, S. 43—45.
- [6] LEHTO, O. und VIRTANEN, K.: Quasikonforme Abbildungen. - Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.
- [7] MENCHOFF, D.: Sur la représentation conforme des domaines plans. - Math. Annalen 95, 1926, S. 641—670.
- [8] MORI, A.: On quasiconformality and pseudo-analyticity. - Trans. Amer. Math. Soc. 84, 1957, S. 56—77.
- [9] MORREY, C. B.: On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations. - Trans. Amer. Math. Soc. 43, 1938, S. 126—166.
- [10] PFLUGER, A.: Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen. - Comment. Math. Helv. 33, 1959, S. 23—33.
- [11] STREBEL, K.: On the maximal dilation of quasiconformal mappings. - Proc. Amer. Math. Soc. 6, 1955, S. 903—909.