ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

399

ABGESCHLOSSENE DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN

VON

TAPANI KUUSALO

HELSINKI 1967
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.399

Am 9 Dezember 1966 vorgelegt von OLLI LEHTO und K. I. VIRTANEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1967

Abgeschlossene differenzierbare Abbildungen

Die vorliegenden Ausführungen enstanden im Jahr 1965 als ein Teil meiner Lizentiatabhandlung über das Existenzproblem der quasikonformen Abbildungen mit einer vorgeschriebenen komplexen Dilatation (vgl. Lehto — Virtanen [5], V. Kap.). Sie erwiesen sich aber in diesem Zusammenhang nicht als besonders zweckmässig, da ihre Verwendung sich bei einer gleichartigen Beweisanordnung leicht durch einen einfachen Kunstgriff vermeiden lässt (Ahlfors — Bers [1], S. 391). Vielleicht können jedoch diese elementaren Folgerungen aus der Sardschen Theorie (Sard [6]) auch an sich von gewissem Interesse sein.

1. Von allen topologischen Räumen wird hier angenommen, dass sie das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllen.

Eine stetige Abbildung $p: E \to G$ heisst eine *Überlagerung* von G, wenn jeder Punkt $x \in G$ eine offene Umgebung U mit der Eigenschaft hat, dass ihr Urbild $\overset{\leftarrow}{p} U$ sich in punktfremde offene Teile V_α zerlegen lässt, die durch p homöomorph auf U abgebildet werden. Zwei Überlagerungen (E, p) und (E', p') sind *isomorph*, wenn es einen solchen Homöomorphismus $h: E \to E'$ gibt, dass $p = p' \circ h$ ist. Falls E zusammenhängend und p surjektiv ist, wird (E, p) ein *Überlagerungsraum* von G genannt. Dann haben die Urbilder $\overset{\leftarrow}{p} x$ aller Punkte x von G dieselbe Mächtigkeit, die die *Ordnung* des Überlagerungsraumes (E, p) heisst. Sind alle Überlagerungsräume eines zusammenhängenden Raumes G zu der identischen Überlagerung $id: G \to G$ isomorph, so ist G *einfach zusammenhängend.*

Wir werden mehrmals von den folgenden Hilfssätzen Gebrauch machen. Die Beweise der zwei ersteren sind ohne weiteres klar.

Hilfssatz 1. Es sei eine abgeschlossene Abbildung $f: E \to G$ gegeben und C irgendeine Komponente des Urbildes von D, $D \subset G$. Dann ist auch die Restriktion $f: C \to D$ abgeschlossen.

Hilfssatz 2. Ist $f: E \to G$ eine offene und abgeschlossene Abbildung eines lokal zusammenhängenden Raumes E in einen zusammenhängenden Raum G, so wird jede Komponente von E durch f auf G bezogen.

Hilfssatz 3. Jeder abgeschlossene lokale Homöomorphismus $f\colon E \to G$ eines parakompakten Raumes E ist eine Überlagerung.

Beweis. Weil f ein lokaler Homöomorphismus des parakompakten Raumes E ist, kann man den Punkten y des Urbildes von $x \in G$ punktfremde offene Umgebungen V_y so zuordnen, dass die Restriktionen $f \mid V_y$ homöomorph sind. Dann ist aber $E - \bigcup V_y$ und also auch $A = f(E - \bigcup V_y)$ abgeschlossen, und so ist $U = G - A$ eine Umgebung von x, deren Urbild in punktfremde, zu U homöomorphe Teile $\overset{\leftarrow}{f} U \cap V_y$ zerfällt.

Bemerkung. Wenn es oben eine gegen x konvergierende Folge $x_1, x_2, \ldots$ gibt, wo $x_n \neq x$, so muss $\overset{\leftarrow}{f} x$ endlich sein. Denn sonst könnte man in E eine diskrete Menge finden, deren Bild x als einen Häufungspunkt hätte.

2. Hier betrachten wir differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren, endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Diese Mannigfaltigkeiten werden nicht als zusammenhängend vorausgesetzt. (Vgl. Lang [3].)

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X hat eine Tangentenmannigfaltigkeit $T(X)$, und jeder differenzierbaren Abbildung $f\colon X \to Y$ entspricht eine Tangentenabbildung $Tf\colon T(X) \to T(Y)$. Wir nennen den Grad der Faserabbildung $T_x f\colon T_x(X) \to T_{fx}(Y)$ den *Grad der Abbildung* f *im Punkt* x. Alle Punkte $x \in X$ mit einem Grad nicht grösser als r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ fassen wir in eine Menge A_r zusammen. Punkte x, wo der Grad kleiner als die Dimension von $T_{fx}(Y)$ ist, heissen *kritisch*, die anderen Punkte *regulär*. Die Mengen dieser Punkte werden mit KP bzw. mit RP bezeichnet. Das Bild von KP besteht aus *kritischen Werten*, entsprechend sein Komplement aus *regulären Werten*, und diese Mengen werden mit KW und RW bezeichnet. Wenn Y eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so ist $KP = A_{n-1}$.

Ein fundamentales Resultat von A. Sard über die induktive Dimension von fA_0 lautet:

Satz 1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine C^q-Abbildung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X. Dann gilt die Ungleichung $\operatorname{Dim}(fA_0) < k$, vorausgesetzt, dass $q \geq n/k$ ist.

Beweis. Vgl. Sard [6], Th. 6.1.

Folgerung. Es sei $f\colon X \to Y$ eine C^2-Abbildung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X mit $KP = A_0$. Ist nun Y eine zusammenhängende

n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $n \geq 2$, so ist auch RW zusammenhängend.

Beweis. Nach dem Satz ist die Dimension von KW nicht grösser als $n-2$, und KW kann also Y nicht zerlegen (Hurewicz—Wallman [2], Th. IV. 4, Cor. 1).

Auch brauchen wir den folgenden Satz von einem mehr elementaren Charakter:

Satz 2. Ist $f: X \to Y$ eine C^1-Abbildung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten X und Y, so liegt RW dicht in Y.

Beweis. S. Sard [6], Th. 4.1.

3. Sind X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so heisst eine Überlagerung (X, p) von Y eine *C^q-Überlagerung*, wenn p ein lokaler C^q-Diffeomorphismus ist.

Hilfssatz 4. Ist eine C^1-Abbildung injektiv auf $\overleftarrow{f}RW$, so ist $f: RP \to f(RP)$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Es seien Punkte x, y von RP gegeben, und $fx = fy = z \notin RW$. Die Punkte x und y haben Umgebungen U und V, die durch f diffeomorph auf dieselbe offene Menge W bezogen werden. Nach Satz 2 ist RW dicht auch in W, und also $U \cap V \cap \overleftarrow{f}RW$ dicht in $U \cup V$ und deshalb $U = V$ und $x = y$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 3. Ist $f: X \to Y$ eine abgeschlossene C^1-Abbildung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten X und Y, so ist RW eine offene Menge. Wenn C eine Komponente von $\overleftarrow{f}RW$ ist, so ist ihr Bild $D = fC$ eine Komponente von RW und $(C, f|C)$ ein C^1-Überlagerungsraum von D, der eine endliche Ordnung hat.

Beweis. Weil RP offen ist, so sind $KP = X - RP$ und $KW = fKP$ abgeschlossen und also $RW = Y - KW$ offen. Nach Hilfssatz 1 ist die Restriktion $f: C \to RW$ eine abgeschlossene Abbildung, und weil $C \subset \overleftarrow{f}RW \subset RP$, so ist sie ein lokaler Diffeomorphismus und also auch eine offene Abbildung. Jetzt ist es leicht einzusehen, dass $D = fC$ eine Komponente von RW (Hilfssatz 2) und $(C, f|C)$ ein C^1-Überlagerungsraum von D ist (Hilfssatz 3). Die Endlichkeit der Ordnung folgt aus der Bemerkung nach Hilfssatz 3.

Folgerung 3.1. Sei $f: X \to Y$ wie oben und weiter RW zusammenhängend. Wenn noch das Urbild irgendeines Punktes von RW aus einem

Punkt besteht, so ist RP zusammenhängend und $f: RP \to f(RP)$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Nach dem Satz ist f injektiv auf $\overset{\leftarrow}{f} RW$ und $f: RP \to f(RP)$ ist also nach Hilfssatz 4 ein Diffeomorphismus. RW liegt dicht in $f(RP)$, und so ist auch RP zusammenhängend.

Folgerung 3.2. Sei $f: X \to Y$ wie oben und weiter RW einfach zusammenhängend. Dann bildet f jede Komponente von $\overset{\leftarrow}{f} RW$ diffeomorph auf RW ab.

Beweis. Alle Überlagerungen $(C, f|C)$ des einfach zusammenhängenden Raumes RW sind zu der identischen Überlagerung isomorph.

Eine Abbildung $f: E \to G$ ist *quasioffen*, wenn jede Umgebung irgendeiner kompakten Komponente von $\overset{\leftarrow}{f} y$, $y \in G$, durch f auf eine Umgebung von y bezogen wird.

Satz 4. Falls eine abgeschlossene C^2-Abbildung $f: X \to Y$ der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten X und Y, $n \geq 2$, mit $KP = A_0$ auf keiner kompakten Komponente von X konstant ist, so ist sie eine quasioffene Abbildung.

Beweis. Sei K eine kompakte Komponente von $\overset{\leftarrow}{f} y$, $y \in Y$. Dann enthält jede Umgebung von K eine offene Umgebung U mit einer kompakten abgeschlossenen Hülle $\bar{U}$. Für jede offene Umgebung V von y bezeichnen wir mit V^* die K enthaltende Komponente von $\bar{U} \cap \overset{\leftarrow}{f} \bar{V}$. Aber $\bar{U}$ war ja kompakt, und so ist der Durchschnitt aller solchen Komponenten V^* gleich K. Folglich gibt es eine offene zusammenhängende Umgebung W von y mit $W^* \cap (\bar{U} - U) = \emptyset$, und dann ist $W^* \subset U$ auch eine Komponente von $\overset{\leftarrow}{f} \bar{W}$ (vgl. Whyburn [7], Ch. I, (10.1)), und, a fortiori, auch die K enthaltende Komponente D von $\overset{\leftarrow}{f} W$ liegt in U. Die Komponente D ist offen, und also muss ihr Bild fD eine nichtleere offene Menge enthalten. Sonst liegte D ganz in $KP = A_0$ und wäre deshalb gleich K, welches wegen der Voraussetzungen unmöglich ist. Zufolge der Sätze 2 und 3 sowie der Folgerung von Satz 1 ist $W \cap RW$ eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge, also haben wir $f(D \cap \overset{\leftarrow}{f} RW) = W \cap RW$ nach den Hilfssätzen 1 und 2. Da aber fD abgeschlossen in W ist und RW dicht in W liegt, so muss fD gleich W sein, woraus die Behauptung folgt.

Satz 5. Sei $f: X \to Y$ eine abgeschlossene C^2-Abbildung der zusammenhängenden n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten X und Y, $n \geq 2$, und $KP = A_0$. Ist f weiter injektiv auf $\overset{\leftarrow}{f} RW$, so sind die Urbilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend, besonders ist f eine monotone Abbildung.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass die Urbilder offener zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind.

$f^{\leftarrow}RW$ liegt dicht in RP, und wenn $f^{\leftarrow}RW = \emptyset$, so ist $X = KP = A_0$ und f eine konstante Abbildung, und die Behauptung gilt trivialerweise.

Also können wir fortan voraussetzen, dass $f^{\leftarrow}RW$ eine nichtleere Menge ist. Sei nun $U \subset Y$ eine offene zusammenhängende Menge. Dann ist auch $U \cap RW$ offen und zusammenhängend, sowie auch sein Urbild $W = f^{\leftarrow}(U \cap RW)$ nach Hilfssatz 1 und 2. Sei weiter K eine Komponente des Urbildes $f^{\leftarrow}y$ irgendeines Punktes y von U und $V \subset f^{\leftarrow}U$ eine zusammenhängende Umgebung von K. Dann ist erstens V nicht gleich K, weil X ja zusammenhängend ist, und entsprechend wie oben beim Beweis des Satzes 4 sehen wir, dass fV eine nichtleere offene Menge enthält und also $fV \cap RW \neq \emptyset$. Nun aber ist auch der Durchschnitt $V \cap W$ nicht leer, und weil $W \subset f^{\leftarrow}U$ zusammenhängend ist, so ist W in allen Komponenten von $f^{\leftarrow}U$ enthalten, und somit ist auch $f^{\leftarrow}U$ zusammenhängend.

Sei nun $C \subset Y$ eine beliebige zusammenhängende Menge und D ihr Urbild. Falls A und B solche offene Mengen in X sind, dass $D \subset A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$, so ist $G = Y - f(X - (A \cup B))$ eine offene Umgebung von C. Also hat C eine offene zusammenhängende Umgebung U, die ganz in G liegt. Dann ist $D \subset f^{\leftarrow}U \subset A \cup B$. Aber nach dem obigen ist $f^{\leftarrow}U$ zusammenhängend, und also wird eine der Mengen A und B sowohl $f^{\leftarrow}U$ als auch D ganz enthalten. Somit ist der Satz bewiesen.

4. Zum Schluss sei noch das oben Bewiesene kurz auf den Existenzsatz der quasikonformen Abbildungen angewandt.

Also, sei eine komplexe C^2-Dilatation $\varkappa$ mit einem kompakten Träger in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ gegeben. Es ist ziemlich leicht zu zeigen, dass es dann eine im Unendlichen konforme C^2-Lösung der Beltramischen Gleichung

$$f_{\bar{z}} = \varkappa f_z\,, \quad \sup_{\mathbf{C}} |\varkappa| < 1\,,$$

von der Form $f(z) = z + O(z^{-1})$ gibt. Die Abbildung $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist abgeschlossen, wegen der Beltramischen Gleichung ist $KP = A_0$, und so ist f auch quasioffen (Satz 4) und folglich eine surjektive Abbildung. Nach der Folgerung von Satz 1 ist RW zusammenhängend und f also diffeomorph auf RP (Satz 3, Folgerung 1). Nun ist f nach Satz 5 wenigstens monoton, und durch eine einfache Modulbetrachtung sehen wir, dass die Urbilder $f^{\leftarrow}y$ von Punkten zu Punkten schrumpfen müssen. Hiermit ist $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ auch injektiv und also eine homöomorphe Lösung der Beltramischen Gleichung, d.h. eine quasikonforme Abbildung von $\mathbf{C}$ mit der vorgeschriebenen komplexen Dilatation $\varkappa$ (vgl. auch Lehto [4], S. 61—62).

Schliesslich kann eine beliebige messbare komplexe Dilatation durch C^2-Funktionen approximiert werden, und so folgt die Existenz auch im allgemeinen Fall.

Mathematisches Institut der
Universität Helsinki

Literatur

[1] Ahlfors, L. V. and L. Bers: Riemann's mapping theorem for variable metrics. - Ann. of Math. *72* (1960), 385—404.

[2] Hurewicz, W. and H. Wallman: Dimension Theory. - Princeton, Princeton University Press 1948.

[3] Lang, S.: Introduction to Differentiable Manifolds. - New York-London, John Wiley & Sons, Inc. 1962.

[4] Lehto, O.: Homeomorphic solutions of a Beltrami differential equation. - Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna, S. 58—65. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1966.

[5] —»— und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. - Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1965.

[6] Sard, A.: The measure of the critical values of differentiable maps. - Bull. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 883—890.

[7] Whyburn, G. T.: Analytic Topology. - Providence, American Mathematical Society 1942.

Gedruckt Januar 1967