ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

441

STETIGKEIT HERMITESCHER FORMEN

VON

HANS JARCHOW

HELSINKI 1969
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1969.441

Am 10. Mai 1968 vorgelegt von R. NEVANLINNA und G. JÄRNEFELT

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1969

0. Einleitung

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Frage nach der Existenz von *Vektorraumtopologien* und *Vektorraumlimitierungen* [2] auf einem (reellen oder komplexen) Vektorraum [1]) E, die eine gegebene nichtausgeartete hermitesche Form Φ auf E stetig machen. Dass es nicht notwendig eine solche Vektorraumtopologie geben muss, ist bekannt. Ein Gegenbeispiel findet man etwa in [5]. Aus den Resultaten von [9] kann man jedoch leicht ein einfaches Kriterium für die Existenz von Vektorraumtopologien der gesuchten Art ableiten. Man zeigt, dass zu jeder derartigen Vektorraumtopologie sogar eine gröbere normierbare existiert, welche dasselbe leistet. In jedem Fall ist es aber möglich, *Marinescu-Limitierungen* [3] auf E anzugeben, für welche Φ stetig ist. Ausserdem ist es mit Hilfe einer gewissen Marinescu-Limitierung von E möglich zu sagen, wann die hermitesche Form Φ für keine Vektorraumtopologie von E stetig sein kann. Die entsprechenden Aussagen finden sich im ersten Abschnitt dieser Arbeit.

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir unter Benutzung der Resultate von G. Wittstock [9] die *Nevanlinna-Topologie* $\tau_N(\Phi)$ von Φ auf E. Die Forderung, dass Φ nichtausgeartet sein soll, bringt eine entsprechende Verschärfung der bekannten Aussagen. Insbesondere können wir eine gewisse Klasse von *Differenzen von Hilberträumen* [8] durch Eigenschaften der zugehörigen Nevanlinna-Topologien charakterisieren.

1. Hermitesche Formen und Limitierungen

Mit $\boldsymbol{K}$ bezeichnen wir immer einen der Körper $\boldsymbol{R}$ (reelle Zahlen) oder $\boldsymbol{C}$ (komplexe Zahlen). Es sei $\tau_{\boldsymbol{K}}$ die natürliche Topologie von $\boldsymbol{K}$. Die durch $c \mapsto \bar{c}$ definierte Abbildung von $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{K}$ bedeute im Falle $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ die Identität, im Falle $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ den Übergang zum Konjugiert-Komplexen. Für einen Vektorraum E über $\boldsymbol{K}$ (kurz $\boldsymbol{K}$-Vektorraum oder auch nur Vektorraum) erhält man den zu E *konjugierten* $\boldsymbol{K}$-*Vektorraum* $\bar{E}$, in dem man auf der Menge E die Skalarmultiplikation des

[1]) Wir verzichten häufig auf eine explizite Angabe des zugrundeliegenden Skalarkörpers.

Vektorraumes E abändert in $(c\,,x) \mapsto \bar{c}\,x$ und die Addition unverändert übernimmt. Die Vektorräume E und $\bar{E}$ sind in natürlicher Weise konjugiert isomorph, und es ist $\bar{\bar{E}} = E$.

Eine *hermitesche Form* auf einem Vektorraum E ist eine Abbildung

$$\Phi : E \times E \to \boldsymbol{K}$$

mit folgenden Eigenschaften: Φ ist linear im ersten Argument, und es gilt $\Phi(x\,,y) = \overline{\Phi(y\,,x)}$ für alle $(x\,,y) \in E \times E$. Durch $Q(x) := \Phi(x\,,x)$ für jedes $x \in E$ bestimmt Φ eine *quadratische* Form $Q : E \to \boldsymbol{K}$. Es sind Q und Φ verknüpft durch die *Polarisationsformeln* ($\forall\ (x\,,y) \in E \times E$):

$$\Phi(x\,,y) = \frac{1}{4}\,(Q(x+y) - Q(x-y)) \qquad \text{im Falle } \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}\,,$$

$$\Phi(x\,,y) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n\,Q(x + i^n\,y) \qquad \text{im Falle } \boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}\,.$$

Eine hermitesche Form auf E wird also durch ihre Werte auf der Diagonalen von $E \times E$ bereits festgelegt. Sie ist zudem genau dann stetig für eine Vektorraumtopologie von E, wenn die zugehörige quadratische Form stetig ist für diese Topologie.

Eine hermitesche Form Φ auf E und ihre quadratische Form Q heissen *nichtausgeartet*, wenn der *Nullraum*

$$N(\Phi) := \{\, x \in E \mid \Phi(x\,,y) = 0 \ \ \forall\, y \in E \,\}$$

der triviale Raum $\{0\}$ ist. Sie heissen *positiv*, wenn $Q(x) \geqq 0$ für jedes $x \in E$ gilt, und *positiv definit*, wenn sie positiv und nichtausgeartet sind.

Ein *hermitescher Raum* ist in dieser Arbeit immer ein Paar $(E\,,\Phi)$ bestehend aus einem Vektorraum E und einer hermiteschen Form Φ auf E. Ein hermitescher Raum heisst *regulär*, wenn seine hermitesche Form nichtausgeartet ist.

Seien $(E\,,\Phi)$ ein hermitescher Raum und $\bar{E}$ der zu E konjugierte Vektorraum. Dann induziert Φ in natürlicher Weise eine Bilinearform

$$\bar{\Phi} : E \times \bar{E} \to \boldsymbol{K}\,.$$

Diese ist dann und nur dann nichtausgeartet, wenn $(E\,,\Phi)$ regulär ist. In diesem Falle bilden E und $\bar{E}$ ein duales Paar $(E\,,\bar{E})$ von Vektorräumen über $\boldsymbol{K}$; wie üblich identifizieren wir $\bar{E}$ mit einem linearen Teilraum des algebraischen Dualraum E^* von E und fassen $\bar{\Phi}$ auf als Restriktion der kanonischen Bilinearform (»Skalarprodukt«)

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle : E \times E^* \to \boldsymbol{K}$$

auf $E \times \bar{E}$. Die genannten Identifikationen werden im folgenden Text (bei festem Φ) immer stillschweigend vorgenommen.

Ein regulär hermitescher Raum (E, Φ) liefert also Anlass zur Einführung lokalkonvexer separierter Topologien auf E bzw. dem zu E konjugierten Vektorraum $\bar{E}$, welche in natürlicher Weise mit Hilfe des dualen Paares $(E, \bar{E})$ gewonnen werden können, siehe [7]. Wie üblich bezeichnen wir mit $\sigma(E, \bar{E})$, $\tau(E, \bar{E})$, $\beta(E, \bar{E})$ (bzw. $\sigma(\bar{E}, E)$, $\tau(\bar{E}, E)$, $\beta(\bar{E}, E)$) die *schwache*, die *Mackeysche* und die *starke Topologie* von E (bzw. von $\bar{E}$) bezüglich der Dualität $(E, \bar{E})$. Es ist klar, dass der konjugierte Isomorphismus $E \leftrightarrow \bar{E}$ ein Homöomorphismus ist für die respektiven schwachen, Mackeyschen und starken Topologien von E und $\bar{E}$. Die schwache Topologie $\sigma(E, \bar{E})$ ist die gröbste unter allen Topologien von E , für welche Φ getrennt stetig ist. Insbesondere ist daher jede (allfällig vorhandene) Vektorraumtopologie von E , welche Φ stetig macht, feiner als $\sigma(E, \bar{E})$ und daher separiert. Im Folgenden nennen wir *Φ-Topologie* von E jede lokalkonvexe Topologie von E , welche feiner ist als $\sigma(E, \bar{E})$.

Nachfolgender Satz gibt ein erstes einfaches Kriterium für die Existenz von Vektorraumtopologien auf einem hermiteschen Raum (E, Φ) , für welche Φ stetig ist. In anderer Formulierung findet man diese Aussage in [9, Satz 1]:

Satz 1. *Auf einem hermiteschen Raum (E, Φ) existiert genau dann eine Vektorraumtopologie, welche Φ stetig macht, wenn es eine Seminorm p auf E gibt, so dass für alle $(x, y) \in E \times E$ gilt:*

$$| \Phi(x, y) | \leqq p(x) \, p(y) .$$

Ist die Ungleichung für eine Seminorm p von E erfüllt, so ist Φ stetig für die durch $\{p\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie von E .

Wir können also die Suche nach Vektorraumtopologien auf einem Vektorraum E , welche eine gegebene hermitesche Form auf E stetig machen, von vornherein auf diejenigen lokalkonvexen Topologien von E beschränken, welche von nur einer Seminorm von E erzeugt werden.

Korollar 1. *Gibt es auf dem regulären hermiteschen Raum (E, Φ) eine Vektorraumtopologie, welche Φ stetig macht, so besitzt E auch eine gröbere normierbare Topologie mit derselben Eigenschaft.*

Korollar 2. *Besitzt der reguläre hermitesche Raum (E, Φ) eine Vektorraumtopologie, welche Φ stetig macht, so ist diese feiner als die Mackey-Topologie $\tau(E, \bar{E})$.*

Die in Satz 1 angegebene Bedingung ist nicht automatisch für jede hermitesche Form auf einem Vektorraum erfüllt. Es gibt reguläre hermitesche Räume, deren Form für keine Vektorraumtopologie auf dem zugrundeliegenden Vektorraum stetig ist. Wir verweisen z. B. auf [5].

Um diesem Nachteil zu entgehen, arbeiten wir statt in der Kategorie der topologischen Vektorräume in der grösseren Kategorie der *Limesvektorräume* im Sinne von H. R. Fischer [2]. Es genügt sogar, nur die Teilkategorie der *Marinescu-Räume* [3] zu betrachten, sich also auf solche Limesvektorräume zu beschränken, welche darstellbar sind als induktive Limites lokalkonvexer Räume. Hier treten die erwähnten Schwierigkeiten nicht auf: Wir werden zeigen, dass jeder reguläre hermitesche Raum Marinescu-Limitierungen definiert, welche seine Form stetig machen.

Für Definition und Eigenschaften der Marinescu-Limitierungen verweisen wir auf [3]. Es ist dabei ohne Belang, dass wir dort und auch in [4] nur Marinescu-Räume über dem Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen untersucht haben. Alle Aussagen übertragen sich, wenn man $\boldsymbol{R}$ durch den Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen ersetzt.

Zum besseren Verständnis des Folgenden geben wir kurz die Konstruktion einer Marinescu-Limitierung Λ_π auf dem topologischen Dualraum E'_π eines separierten lokalkonvexen Raumes (E, π) nach H. H. Keller [6] wieder. Man vergleiche auch mit [4].

Sei P eine definierende und gerichtete Seminormenfamilie in (E, π) mit Ordnungsrelation »$\leqq$«. Für eine Linearform u auf E gilt $u \in E'_\pi$ genau dann, wenn ein $p \in P$ existiert, so dass

$$|u|_p := \sup \{ |\langle x, u \rangle| \mid x \in E, \ p(x) \leqq 1 \} < \infty .$$

Für jedes $p \in P$ ist

$$E^p_\pi := \{ u \in E'_\pi \mid |u|_p < \infty \}$$

ein linearer Teilraum von E'_π, dem wir durch $u \mapsto |u|_p$ eine Normtopologie $\varkappa^p_\pi$ aufprägen. Für $p \leqq q$ ist E^p_π linearer Teilraum von E^q_π, und die Inklusion ist $(\varkappa^p_\pi, \varkappa^q_\pi)$-stetig. Schliesslich überdecken die E^p_π den ganzen Raum E'_π, so dass auf E'_π die Marinescu-Limitierung.

$$\Lambda_\pi := \operatorname*{ind}_{p \in P} \varkappa^p_\pi$$

existiert. Sie ist nach [6] unabhängig von der speziellen Wahl der Seminormenfamilie P. Wir nennen (E'_π, Λ_π) bzw. Λ_π *dual* zu (E, π) bzw. π.

Für die folgende Aussage vergleiche man mit [3], [4], [6]:

Lemma 1. *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum* (E, π) *mit dualem Marinescu-Raum* (E'_π, Λ_π) *gilt:*

(1) Λ_π *ist die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen* χ' *auf* E'_π, *für welche das Skalarprodukt* $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E'_\pi \to \boldsymbol{K}$ $(\pi \times \chi', \tau_{\boldsymbol{K}})$-*stetig ist.*

(2) π *ist die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen* χ *auf* E, *für welche das Skalarprodukt* $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E'_\pi \to \boldsymbol{K}$ $(\chi \times \Lambda_\pi, \tau_{\boldsymbol{K}})$-*stetig ist.*

(3) *Für normierbares* π *ist* Λ_π *die starke Normtopologie* $\beta(E'_\pi, E)$. *Ist* π *nicht normierbar, so ist* Λ_π *keine Topologie und lässt auch keine feinere Vektorraumtopologie auf* E'_π *zu.*

Ist $\bar{E}$ wieder der konjugierte Vektorraum eines regulären hermiteschen Raumes (E, Φ), so gilt $\bar{E} \subset E'_\pi$ für jede Φ-Topologie π von E. Man hat Gleichheit nur im Falle $\pi \leqq \tau(E, \bar{E})$. Der zu (E, π) duale Marinescu-Raum (E'_π, Λ_π) induziert vermöge der kanonischen Abbildung $E \to E'_\pi$ auf E eine Marinescu-Limitierung, die wir wieder mit Λ_π bezeichnen wollen. Wir nennen sie *die zu* π *duale Marinescu-Limitierung von* E. Analog haben wir auch eine zu π duale Marinescu-Limitierung von $\bar{E}$; für diese Marinescu-Limitierungen wird der konjugierte Isomorphismus $E \leftrightarrow \bar{E}$ abermals ein Homöomorphismus. Unter Anwendung der Resultate aus [3] und [4] erhalten wir aus Lemma 1:

Satz 2. *Sei* Λ_π *die zu einer* Φ*-Topologie* π *des regulären hermiteschen Raumes* (E, Φ) *duale Marinescu-Limitierung von* E. *Dann gilt:*

(1) *Unter allen Marinescu-Limitierungen* χ *von* E, *für die* Φ $(\pi \times \chi, \tau_K)$*-stetig ist (bzw.* $(\chi \times \Lambda_\pi, \tau_K)$*-stetig ist), ist* Λ_π *(bzw. ist* π *im Falle* $\pi \leqq \tau(E, \bar{E})$*) die gröbste.*

(2) Λ_π *ist eine normierbare Topologie, wenn* π *normierbar ist.*

(3) *Ist überdies* $\pi \leqq \tau(E, \bar{E})$ *und* π *nicht normierbar, so ist* Λ_π *keine Topologie und lässt auch keine feinere Vektorraumtopologie auf* E *zu.*

Aus [3] und [6] erhalten wir die folgenden beiden Aussagen:

Lemma 2. *Es sein* Λ_π *und* Λ_ω *die dualen Marinescu-Limitierungen der* Φ*-Topologien* π *und* ω *des regulären hermiteschen Raumes* (E, Φ). *Aus* $\pi \leqq \omega$ *folgt stets* $\Lambda_\omega \leqq \Lambda_\pi$.

Lemma 3. *Es sei* Λ_π *die duale Marinescu-Limitierung auf* E *zu einer* Φ*-Topologie* π *des regulären hermiteschen Raumes* (E, Φ). *Aus* $\pi \leqq \tau(E, \bar{E})$ *folgt stets* $\beta(E, \bar{E}) \leqq \Lambda_\pi$.

Insbesondere ist also

$$\sigma(E, \bar{E}) \leqq \tau(E, \bar{E}) \leqq \beta(E, \bar{E}) \leqq \Lambda_{\tau(E,\bar{E})} \leqq \Lambda_{\sigma(E,\bar{E})},$$

wobei jetzt alle Marinescu-Limitierungen als solche auf E verstanden werden. Aus $\beta(E, \bar{E}) \leqq \Lambda_{\tau(E,\bar{E})}$ folgt nach Satz 2 noch $\tau(E, \bar{E}) \leqq \Lambda_{\beta(E,\bar{E})}$, was wir später verwenden wollen. Zunächst erhalten wir:

Satz 3. *Für jeden regulären hermiteschen Raum* (E, Φ) *gilt: Die hermitesche Form* Φ *ist stetig für jede zu einer* Φ*-Topologie* $\pi \leqq \tau(E, \bar{E})$ *duale Marinescu-Limitierung* Λ_π *von* E.

Ausserdem bekommen wir ein weiteres Kriterium für die »topologische Stetigkeit« nichtausgearteter hermitescher Formen:

Satz 4. *Sei* (E, Φ) *ein regulärer hermitescher Raum. Die Form* Φ *ist genau dann stetig für eine* Φ*-Topologie* π *von* E, *wenn diese der Bedingung* $\Lambda_\pi \leqq \pi$ *genügt.*

Jede solche Topologie genügt ferner der Bedingung $\tau(E, \bar{E}) \leqq \pi$. Wir wollen versuchen, eine bessere Schranke zu finden.

Lemma 4. *Jede normierbare Φ-Topologie π auf einem regulären hermiteschen Raum (E, Φ) ist feiner als die zur starken Topologie $\beta(E, \bar{E})$ duale Marinescu-Limitierung $\Lambda_{\beta(E,\bar{E})}$ von E.*

Beweis. Auf dem topologischen Dualraum E'_π von (E, π) ist die duale Marinescu-Limitierung Λ_π gerade die starke Topologie $\beta(E'_\pi, E)$. Weil π eine Φ-Topologie ist, ist $\bar{E}$ ein Teilraum von E'_π. Man zeigt, dass die Inklusion $\bar{E} \to E'_\pi$ stetig ist für die respektiven starken Topologien, so dass man auf E die Beziehung $\Lambda_\pi \leqq \beta(E, \bar{E})$ hat. Nach Satz 2 folgt $\Lambda_{\beta(E,\bar{E})} \leqq \pi$.

Korollar 1. *Sei die Form Φ des regulären hermiteschen Raumes (E, Φ) stetig für die Vektorraumtopologie π von E. Dann ist π feiner als die zur starken Topologie $\beta(E, \bar{E})$ duale Marinescu-Limitierung $\Lambda_{\beta(E,\bar{E})}$ von E.*

Ist P eine gerichtete definierende Seminormenfamilie in $(E, \beta(E, \bar{E}))$, so schreiben wir mit $\beta :=\beta(E, \bar{E})$ wie vorher

$$(*) \qquad (E'_\beta, \Lambda_\beta) := \operatorname*{ind}_{p \in P} (E^p_\beta, \varkappa^p_\beta)$$

für den dualen Marinescu-Raum. Für P wählen wir etwa die durch die $\sigma(E, \bar{E})$-beschränkten Teilmengen M von E bestimmte Familie von Seminormen

$$p_M : x \mapsto \sup |\Phi(x, M)|$$

auf E, wobei wir

$$|\Phi(x, M)| := \{ |\Phi(x, y)| \mid y \in M \}$$

setzen. Eine Teilmenge M von E ist genau dann $\sigma(E, \bar{E})$-beschränkt, wenn $|\Phi(x, M)|$ für jedes $x \in E$ beschränkt ist.

Auf E erhalten wir aus $(*)$ in natürlicher Weise eine Marinescu-Struktur:

$$(E, \Lambda_\beta) = \operatorname*{ind}_{p \in P} (E^p, \varkappa^p).$$

Für $p = p_M \in P$, M eine $\sigma(E, \bar{E})$-beschränkte Teilmenge von E, ist E^p dabei der Raum aller $x \in E$ mit

$$\sup \{ |\Phi(x, y)| \mid y \in E, \ \sup |\Phi(y, M)| \leqq 1 \} < \infty,$$

und $\varkappa^p$ ist die von $\varkappa^p_\beta$ auf E^p indizierte Normtopologie. Nach [6] aber lässt Λ_β genau dann *keine* feinere Vektorraumtopologie auf E zu, wenn $E \neq E^p$ für jedes $p \in P$ gilt. Damit erhalten wir:

Korollar 2. *Gibt es zu jeder $\sigma(E, \bar{E})$-beschränkten Teilmenge M des regulären hermiteschen Raumes (E, Φ) einen Vektor $x_M \in E$, so dass*

$$\{ \, |\Phi(x_M\,, y)| \, \big| \; y \in E \, , \, \sup |\Phi(y\,, M)| \leqq 1 \}$$

unbeschränkt ist, so ist Φ *für keine Vektorraumtopologie von* E *stetig.*

Wir wissen allerdings nicht, ob Φ immer stetig ist für die Marinescu-Limitierung $\Lambda_{\beta(E,\bar{E})}$. Wenn dies aber der Fall ist und noch $\beta(E\,, \bar{E}) \leqq \Lambda_{\beta(E,\bar{E})}$ gilt, so ist jede allfällig vorhandene Vektorraumtopologie von E, welche Φ stetig macht, sogar feiner als die starke Topologie $\beta(E\,, \bar{E})$.

Die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen von E, von denen wir mit Sicherheit sagen können, dass sie Φ stetig machen, ist die zur Mackey-Topologie $\tau(E\,, \bar{E})$ duale Marinescu-Limitierung $\Lambda_{\tau(E,\bar{E})}$ von E. Diese Limitierung ist noch in anderer Weise ausgezeichnet, was in den nächsten beiden Aussagen deutlich werden soll.

Unter einer *unitären Transformation* des hermiteschen Raumes $(E\,, \Phi)$ verstehen wir einen Automorphismus u von E, welcher für jedes $(x\,, y) \in E \times E$ der Bedingung

$$\Phi(u(x)\,, u(y)) = \Phi(x\,, y)$$

genügt. Unter der Komposition von Abbildungen ist die Menge $\mathfrak{U}(E\,, \Phi)$ aller unitären Transformationen von $(E\,, \Phi)$ eine Gruppe und heisst die *unitäre Gruppe* von $(E\,, \Phi)$. Wir werden in einer späteren Arbeit ausführlicher darauf zurückkommen. Hier beweisen wir nur:

Satz 5. *Für jeden regulären hermiteschen Raum* $(E\,, \Phi)$ *ist die unitäre Gruppe* $\mathfrak{U}(E\,, \Phi)$ *Untergruppe der Gruppe aller bistetigen Automorphismen des Marinescu-Raumes* $(E\,, \Lambda_{\tau(E,\bar{E})})$. *Dabei ist* $\Lambda_{\tau(E,\bar{E})}$ *die zur Mackey-Topologie* $\tau(E\,, \bar{E})$ *duale Marinescu-Limitierung von* E.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Jedes $u \in \mathfrak{U}(E\,, \Phi)$ ist stetig für $\Lambda_{\tau(E,\bar{E})}$. Ist $u \in \mathfrak{U}(E\,, \Phi)$, so ist für jedes feste $x = u(z) \in E$ und jedes $y \in E$:

$$\Phi_x \circ u(y) = \Phi(u(y)\,, u(z)) = \Phi_z(y)\,.$$

Dabei bezeichnen wir mit $\Phi_x\,, \ldots$ die partielle Abbildung $E \to \boldsymbol{K}$ von Φ bei fester zweiter Komponente $x\,, \ldots$. Es folgt die $(\sigma(E\,, \bar{E})\,, \sigma(E\,, \bar{E}))$-Stetigkeit von u und damit die Existenz und die $(\sigma(\bar{E}\,, E)\,, \sigma(\bar{E}\,, E))$-Stetigkeit einer Transponierten ${}^t u : \bar{E} \to \bar{E}$. Nach [7] ist ${}^t u$ auch $(\tau(\bar{E}\,, E)\,, \tau(\bar{E}\,, E))$-stetig. Nach [4] folgt daraus durch nochmaliges Transponieren die $(\Lambda_{\tau(E,\bar{E})}\,, \Lambda_{\tau(E,\bar{E})})$-Stetigkeit von u.

Die schwächste Topologie eines regulären hermiteschen Raumes $(E\,, \Phi)$, für welche Φ stetig sein kann, ist die Mackey-Topologie $\tau(E\,, \bar{E})$. Wir zeigen:

Satz 6. *Für die Mackey-Topologie* $\tau(E\,, \bar{E})$ *des regulären hermiteschen Raumes* $(E\,, \Phi)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Φ *ist* $(\tau(E\,, \bar{E}) \times \tau(E\,, \bar{E})\,, \tau_K)$*-stetig.*

(ii) $(E\,, \tau(E\,, \bar{E}))$ *ist ein reflexiver Banachraum.*

(iii) $(E\,, \tau(E\,, \bar{E}))$ *ist ein reflexiver Fréchetraum.*

Beweis. Ist (i) erfüllt, so ist $\tau(E, \bar{E}) = \beta(E, \bar{E}) = \Lambda_{\tau(E,\bar{E})}$. Normierbarkeit haben wir wegen Satz 2, so dass $(E, \tau(E, \bar{E}))$ ein reflexiver Banachraum ist. Die Aussage (ii) impliziert sowieso (iii), und (iii) liefert (i), weil die getrennte Stetigkeit von hermiteschen (bzw. bilinearen) Formen auf Fréchetträumen nach [7] die Stetigkeit nach sich zieht.

Einen anderen Beweis für »(i) $\Rightarrow$ (ii)« findet man für $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ in [5], wo reguläre hermitesche Räume, für welche eine (und damit jede) der Bedingungen von Satz 6 erfüllt ist, *pseudounitäre Räume* heissen.

2. Differenzen von Hilberträumen

In [9] wird auf einem hermiteschen Raum (E, Φ) die (translationsinvariante) *Nevanlinna-Topologie* $\tau_N(\Phi)$ durch Vorgabe der Nullumgebungen

$$U_{\varepsilon,M} := \left\{ x \in E \,\middle|\, |\Phi(x, t)| < \varepsilon \ \ \forall\, t \in M \cup \{x\} \right\}$$

betrachtet. Dabei durchlaufen ε die positiven reellen Zahlen und M die endlichen Teilmengen von E. Die Skalarmultiplikation in E ist stetig für diese Topologie, hingegen braucht die Addition nicht notwendig stetig zu sein. Also ist $\tau_N(\Phi)$ nicht immer eine Vektorraumtopologie. Sie ist jedoch die gröbste unter allen Topologien von E, für welche Φ getrennt stetig und die zugehörige quadratische Form stetig ist.

Satz 7. *Die Nevanlinna-Topologie $\tau_N(\Phi)$ des hermiteschen Raumes (E, Φ) ist genau dann separiert, wenn (E, Φ) regulär ist.*

Beweis. Wenn $\tau_N(\Phi)$ separiert ist, so ist

$$\{0\} = \bigcap_{\varepsilon,M} U_{\varepsilon,M} = N(\Phi),$$

also Φ nichtausgeartet. Ist umgekehrt (E, Φ) regulär, so ist die separierte Topologie $\sigma(E, \bar{E})$ die gröbste Topologie von E, welche Φ getrennt stetig macht. Die Topologie $\tau_N(\Phi)$ ist feiner als $\sigma(E, \bar{E})$, also separiert.

G. Wittstock beweist in [9], dass die Nevanlinna-Topologie $\tau_N(\Phi)$ von (E, Φ) genau dann eine Vektorraumtopologie ist, wenn eine der beiden Formen $\pm\Phi$ quasipositiv ist. In diesem Fall ist $\tau_N(\Phi)$ sogar lokalkonvex und wird nur von einer Seminorm erzeugt. Ausserdem ist Φ stetig für $\tau_N(\Phi)$. Dabei heisst eine hermitesche Form Φ auf einem Vektorraum E *quasipositiv*, wenn sie sich darstellen lässt als Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$ zweier positiver hermitescher Formen Φ_1, Φ_2 auf E, wobei der Nullraum $N(\Phi_2)$ endliche Kodimension in E hat. Man kann zeigen (siehe [9], Beweis zu Satz 13), dass diese Aussage gleichwertig ist mit der folgenden:

Es gibt eine kanonische Zerlegung

$$(E\,,\Phi) = (E^+\,,\Phi^+) \oplus (E^-\,,-\Phi^-)$$

von $(E\,,\Phi)$ in einen positiven hermiteschen Raum $(E^+\,,\Phi^+)$ und einen positiv definiten hermiteschen Raum $(E^-\,,\Phi^-)$ mit $\dim E^- < \infty$. Die Zerlegung ist orthogonal im üblichen Sinn.

Damit ist $(E^-\,,\Phi^-)$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum. Verlangen wir von dem quasipositiven hermiteschen Raum $(E\,,\Phi)$ zusätzlich Regularität, so wird auch Φ^+ definit, $(E^+\,,\Phi^+)$ also ein Skalarproduktraum. Ist dieser Skalarproduktraum sogar ein Hilbertraum, so ist $(E\,,\Phi)$ eine *Differenz von Hilberträumen* im Sinne von E. Scheibe [8]. Wir sagen, eine Differenz von Hilberträumen $(E\,,\Phi) = (E^+\,,\Phi^+) \oplus (E^-\,,-\Phi^-)$ habe eine *endlichdimensionale Komponente*, wenn einer der Räume E^+ oder E^- endlichdimensional ist. Aus dem oben zitierten Resultat und Satz 7 erhalten wir zunächst:

Satz 8. *Für einen hermiteschen Raum $(E\,,\Phi)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(E\,,\Phi)$ *oder* $(E\,,-\Phi)$ *ist quasipositiv und regulär.*

(ii) *Die Nevanlinna-Topologie $\tau_N(\Phi)$ von $(E\,,\Phi)$ ist normierbar.*

Hiervon beweisen wir folgende Verschärfung:

Satz 9. *Für einen hermiteschen Raum $(E\,,\Phi)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(E\,,\Phi)$ *ist eine Differenz von Hilberträumen mit einer endlichdimensionen Komponente.*

(ii) *Die Nevanlinna-Topologie $\tau_N(\Phi)$ von $(E\,,\Phi)$ ist eine reflexive Banachtopologie.*

Beweis. Sei $(E\,,\Phi) = (E^+\,,\Phi^+) \oplus (E^-\,,-\Phi^-)$ eine kanonische Zerlegung von $(E\,,\Phi)$ in Hilberträume und o. B. d. A. $\dim E^- < \infty$. Die sog. Zerlegungsmajorante $\Psi := \Phi^+ \oplus \Phi^-$ von Φ (siehe [9]) macht dann E zu einem Hilbertraum und definiert nach [9], Satz 7, auf E dieselbe starke und schwache Topologie wie Φ. Für die von der Norm $x \mapsto \overset{+}{\sqrt{\Psi(x\,,x)}}$ definierte Hilbertraumtopologie η von E gilt dann $\eta = \tau(E\,,\bar{E}) = \beta(E\,,\bar{E})$. Aus der $(\tau(E\,,\bar{E}) \times \tau(E\,,\bar{E})\,,\tau_K)$-Stetigkeit von Φ folgt $\tau_N(\Phi) \leqq \tau(E\,,\bar{E})$. Aus der $(\tau_N(\Phi) \times \tau_N(\Phi)\,,\tau_K)$-Stetigkeit von Φ folgt, dass $\tau_N(\Phi) = \tau(E\,,\bar{E}) = \beta(E\,,\bar{E})$ eine reflexive Banachtopologie sein muss, siehe Satz 6.

Ist umgekehrt $\tau_N(\Phi)$ eine reflexive Banachtopologie, so sind zunächst Φ und $-\Phi$ nichtausgeartet und o. B. d. A. Φ quasipositiv. Es sei $(E\,,\Phi) = (E^+\,,\Phi^+) \oplus (E^-\,,-\Phi^-)$ eine kanonische Zerlegung von $(E\,,\Phi)$ in Skalarprodukträume $(E^\pm\,,\Phi^\pm)$ mit $\dim E^- < \infty$. Aus [9] verwenden wir jetzt die Korollare 1 und 2 zu Lemma 8 sowie Satz 14. Aus Korollar 1 folgt $\tau_N(\Phi) = \beta(E\,,\bar{E})$. Aus Korollar 2 und Satz 14 folgt $\tau_N(\Phi) = \eta$. Also ist (E , Ψ) ein Hilbertraum und damit (E , Φ) eine Differenz von Hilberträumen mit einer endlichdimensionalen Komponente.

In diesem Fall ist $\tau_N(\Phi)$ sogar die einzige Fréchettopologie auf E , welche Φ stetig macht. Jede derartige Fréchettopologie müsste nämlich feiner sein als die Nevanlinna-Topologie $\tau_N(\Phi)$, dieser also gleich, weil auf einem Vektorraum nach einem bekannten Satz niemals zwei verschiedene vergleichbare Fréchettopologien existieren können. Vergleiche hierzu [7] und [8].

Universität Zürich
Schweiz

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. XVIII. Espaces vectoriels topologiques. (Chapitres III—V.) - Actualités scientifiques et industrielles 1229. Hermann, Paris, 1964.

[2] Fischer, H. R.: Limesräume. - Math. Ann. 137, 1959, S. 269—303.

[3] Jarchow, H.: Marinescu-Räume. - Comment. Math. Helv. 44, 1969, S. 138—163.

[4] —»— Dualität und Marinescu-Räume. - Erscheint in den Math. Ann.

[5] Jelínek, J., und J. Virsik: Pseudo-unitary spaces. - Časopis Pěst. Mat. 91, 1966, S. 18—33.

[6] Keller, H. H.: Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume. - Math. Ann. 159, 1965, S. 259—270.

[7] Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. - Macmillan series in advances mathematics and theoretical physics. The Macmillan Company, New York / Collier-Macmillan Limited, London, 1966.

[8] Scheibe, E.: Über hermitische Formen in topologischen Vektorräumen I. - Ann. Acad. Sci. Fennicae A. I. 294, 1960.

[9] Wittstock, G.: Über Majoranten indefiniter Bilinearformen. - Ann. Acad. Sci. Fennicae A. I. 381, 1966.

Gedruckt Juni 1969