ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

475

INVARIANTE TEILRÄUME DEFINISIERBARER J-SELBSTADJUNGIERTER OPERATOREN

VON

HEINZ LANGER

HELSINKI 1971
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1971.475

Am 13. Februar 1970 vorgelegt von Olli Lehto

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1971

Einleitung

Im Jahre 1944 bewies L. S. Pontrjagin [15], dass ein J-selbstadjungierter Operator A in einem J-Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ (Definitionen im folgenden Abschnitt 1) einen maximalen J-nichtnegativen invarianten Teilraum besitzt. Diese Aussage wurde später von verschiedenen Autoren (z. B. [8], [3]) für J-selbstadjungierte Operatoren in beliebigen J-Räumen verallgemeinert unter der Voraussetzung der Vollstetigkeit gewisser Komponenten des Operators A. In dieser Note zeigen wir, dass sich entsprechende Verallgemeinerungen des Satzes von L. S. Pontrjagin ergeben, wenn man den Operator A als definisierbar voraussetzt, d. h., es existiert ein Polynom f, so dass $f(A)$ ein J-nichtnegativer Operator ist. Dabei formulieren und beweisen wir diese Aussagen in Abschnitt 3 für kommutative Familien J-selbstadjungierter Operatoren; sie sind aber i. allg. auch neu für den Spezialfall eines einzelnen Operators [1]).

Die Betrachtungen in Abschnitt 4 stehen in engem Zusammenhang mit der Arbeit [14]. R. S. Phillips formuliert dort die folgende Hypothese: Ist $\mathfrak{A}$ eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren, dann lässt sich jedes duale Paar von Teilräumen, das invariant ist für alle $A \in \mathfrak{A}$, zu einem maximalen dualen Paar erweitern, das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{A}$. Unser Satz 4.2 besagt, dass diese Hypothese richtig ist, wenn $\mathfrak{A}$ nur J-nichtnegative Operatoren enthält.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass entsprechende Aussagen auch für definisierbare J-unitäre Operatoren gelten. Wir verzichten jedoch darauf, diese zu formulieren.

Herrn Professor Dr. I. S. Louhivaara danke ich sehr für seine grosse Unterstützung bei der Vorbereitung dieser Arbeit zum Druck.

1. Hilfsmittel aus der Theorie J-selbstadjungierter Operatoren

Wir nennen einen komplexen linearen Raum $\mathfrak{H}$ einen *J-Raum* für die Skalarprodukte $[x, y]$ und (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$, wenn $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum bezüglich des positiv definiten Skalarproduktes (x, y) ist

[1]) Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit wurden ohne Beweise in [10] mitgeteilt.

und zwischen den beiden Skalarprodukten eine Beziehung der Form $[x, y] = (J x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ besteht; dabei sei der Operator J die Differenz zweier orthogonaler komplementärer Projektionen P_+, P_-: $J = P_+ - P_-$, $P_+ = P_+^2 = P_+^*$, $P_+ + P_- = I$. Setzen wir $\mathfrak{H}_+ = P_+ \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_- = P_- \mathfrak{H}$, so gestattet $\mathfrak{H}$ also die Darstellung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_- . \tag{1}$$

Ist dabei insbesondere $\varkappa = \min(\dim \mathfrak{H}_+, \dim \mathfrak{H}_-) < \infty$, dann nennen wir $\mathfrak{H}$ einen J-Raum *vom Typ* $\Pi_\varkappa$.

Ein Element $x \in \mathfrak{H}$ heisse *J-positiv* (bzw. *J-nichtnegativ, J-nullartig* etc.), wenn $[x, x] > 0$ (bzw. $[x, x] \geqq 0$, $[x, x] = 0$ etc.) gilt; entsprechend nennen wir einen Teilraum von $\mathfrak{H}$ *J-positiv* (bzw. *J-nichtnegativ, J-nullartig* etc.), falls dessen vom Nullelement verschiedene Elemente sämtlich J-positiv (bzw. J-nichtnegativ, J-nullartig etc.) sind, und setzen noch

$$\mathfrak{P}_+ = \{ x \mid [x, x] \geqq 0 \},$$
$$\mathfrak{P}_- = \{ x \mid [x, x] \leqq 0 \},$$
$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_+ \cap \mathfrak{P}_- .$$

Ein Teilraum $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}_+$ (bzw. $\mathfrak{P}_-$) wird *maximal* genannt, wenn er nicht in einem anderen Teilraum von $\mathfrak{P}_+$ (bzw. $\mathfrak{P}_-$) echt enthalten ist; $\mathfrak{M}_+$ (bzw. $\mathfrak{M}_-$) bezeichne die Menge der maximalen Teilräume von $\mathfrak{P}_+$ (bzw. $\mathfrak{P}_-$). Zu jedem Teilraum $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}_+$ gibt es einen linearen Operator K von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$, $\|K\| \leqq 1$, so dass sich $\mathfrak{L}$ in der Form

$$\mathfrak{L} = \{ x \mid x = x_+ + K x_+ , \ x_+ \in \mathfrak{H}_+ \} \tag{2}$$

darstellen lässt; K heisst dabei der zu $\mathfrak{L}$ gehörige *Winkeloperator*. Die durch (2) definierte Zuordnung zwischen Teilräumen aus $\mathfrak{M}_+$ und Operatoren K von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$ ist eineindeutig, [1].

Zwei Elemente x, y (bzw. Teilmengen $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$) von $\mathfrak{H}$ heissen *J-orthogonal*, in Zeichen $x \perp y$ (bzw. $\mathfrak{L}_1 \perp \mathfrak{L}_2$), wenn $[x, y] = 0$ (bzw. $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = \{0\}$) gilt. Für einen Teilraum $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$ sei schliesslich $\mathfrak{L}^\perp$ das *J-orthogonale Komplement* von $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{L}^\perp = \{ x \mid [x, \mathfrak{L}] = \{0\} \}$. Bekanntlich besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^\perp$ i. allg. nicht nur aus dem Nullelement, und die Beziehungen [2])

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^\perp = \{0\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^\perp} = \mathfrak{H}$$

sind äquivalent, [1]. Ein Teilraum $\mathfrak{L}$ heisst *J-projektionsvollständig*, wenn

[2]) Der Querstrich bezeichnet die Abschliessung.

sogar $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}^{\perp} = \mathfrak{H}$ gilt, d. h., wenn jedes Element $x \in \mathfrak{H}$ eine eindeutige Zerlegung $x = x'+x''$ mit $x' \in \mathfrak{L}$, $x'' \in \mathfrak{L}^{\perp}$ gestattet.

Wir betrachten in dieser Note ausschliesslich beschränkte lineare Operatoren. Ein solcher Operator A heisst *J-selbstadjungiert*, wenn $[A\,x\,,y] = [x\,,A\,y]$ für alle $x\,,y \in \mathfrak{H}$ gilt. Man sieht leicht, dass die J-projektionsvollständigen Teilräume genau die Wertebereiche J-selbstadjungierter Projektionen sind.

Lemma 1.1. *Ein J-projektionsvollständiger Teilraum $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$ ist ein J-Raum für das Skalarprodukt $[x\,,y]$ $(x\,,y \in \mathfrak{L})$ und ein positiv definites Skalarprodukt, dessen Norm der von $(x\,,y)$ $(x\,,y \in \mathfrak{L})$ auf $\mathfrak{L}$ erzeugten Norm äquivalent ist.*

Beweis. Gemäss [1], § 4, 4°, und [7], Lemmata 1.3 und 1.4, genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{L}$ folgenvollständig ist bezüglich der vom Skalarprodukt $[x\,,y]$ auf $\mathfrak{L}$ erzeugten schwachen Topologie. Es sei $\mathfrak{L}$ der Wertebereich der J-selbstadjungierten Projektion E, $(x_n) \subset \mathfrak{L}$ und $[x_n - x_m\,,y] \to 0$ $(m\,,n \to \infty)$ für alle $y \in \mathfrak{L}$. Hieraus folgt $(x_n - x_m\,,J\,z) = [x_n - x_m\,,E\,z] \to 0$ $(m\,,n \to \infty)$ für alle $z \in \mathfrak{H}$. Da der Hilbertraum schwach folgenvollständig ist, existiert ein Element x_0 mit $[x_n - x_0\,,z] \to 0$. Offensichtlich gilt dabei $x_0 \in \mathfrak{L}$.

Ein geordnetes Paar $\{\mathfrak{L}_+\,,\mathfrak{L}_-\}$ von Teilräumen des J-Raumes $\mathfrak{H}$ heisst ein *duales Paar*, wenn die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{P}_+\,,\qquad \mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{P}_-\,,\qquad \mathfrak{L}_+ \perp \mathfrak{L}_-\,;$$

ein duales Paar $\{\mathfrak{L}_+\,,\mathfrak{L}_-\}$ heisst *maximal*, wenn darüberhinaus $\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{L}_- \in \mathfrak{M}_-$ gilt, d. h., wenn $\mathfrak{L}_+$ und $\mathfrak{L}_-$ maximale Teilräume von $\mathfrak{P}_+$ bzw. $\mathfrak{P}_-$ sind. Grundlegend für unsere Betrachtungen ist die folgende Aussage, die in einem allgemeineren Resultat von R. S. Phillips [14] enthalten ist:

(A) *Zu jedem dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+\,,\mathfrak{L}_-\}$ gibt es mindestens ein maximales duales Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max}\,,\mathfrak{L}_-^{\max}\}$ mit $\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_+^{\max}$ und $\mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{L}_-^{\max}$.*

Wir sagen in diesem Falle, das duale Paar $\{\mathfrak{L}_+\,,\mathfrak{L}_-\}$ lasse sich zu dem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max}\,,\mathfrak{L}_-^{\max}\}$ *erweitern*. Ein duales Paar $\{\mathfrak{L}_+\,,\mathfrak{L}_-\}$ nennen wir *invariant* bezüglich eines Operators A, wenn $A\,\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_+$ und $A\,\mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{L}_-$ gilt.

Der J-selbstadjungierte Operator A in $\mathfrak{H}$ heisst *J-nichtnegativ*, wenn $[A\,x\,,x] \geqq 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt; A heisst *definisierbar*, falls für ihn ein Polynom $f \not\equiv 0$ existiert, so dass $f(A)$ J-nichtnegativ ist; f nennen wir in diesem Falle ein *definisierendes Polynom* für den Operator A. Spektraleigenschaften definisierbarer J-selbstadjungierter Operatoren wurden in [9] (vgl. auch [4], [5]) untersucht. Wir stellen hier einige später benötigte Ergebnisse zusammen.

(B) *Ist A ein definisierbarer J-selbstadjungierter Operator und f*

ein zugehöriges definisierendes Polynom, so besteht das nichtreelle Spektrum von A *aus höchstens endlich vielen Paaren von Eigenwerten* $\lambda_\nu , \overline{\lambda}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots , n)$*; diese sind notwendig Nullstellen von* f*. Der Raum* $\mathfrak{H}$ *ist darstellbar in der Form* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{L}_o + \mathfrak{L}_u$*; dabei stimmt* $\sigma(A | \mathfrak{H}')$ *mit dem reellen,* $\sigma(A | \mathfrak{L}_o)$ *(bzw.* $\sigma(A | \mathfrak{L}_u)$*) mit dem in der offenen oberen (bzw. unteren) Halbebene gelegenen Spektrum von* A *überein,* $\mathfrak{H}'$ *ist J-projektionsvollständig,* $\mathfrak{L}_o$ *und* $\mathfrak{L}_u$ *sind J-nullartige, zu* $\mathfrak{H}'$ *J-orthogonale Teilräume.*

Auf Grund dieser Zerlegbarkeit von $\mathfrak{H}$ kann man sich bei der Untersuchung definisierbarer Operatoren A oft auf den Fall beschränken, dass $\sigma(A)$ reell ist; dann existiert stets auch ein definisierendes Polynom mit lauter reellen Nullstellen.

(C) *Ist* A *ein definisierbarer J-selbstadjungierter Operator und* f *ein zugehöriges definisierendes Polynom mit lauter reellen Nullstellen, so gibt es eine Abbildung* $t \to E_t$*, die sog. Eigenspektralfunktion des Operators* A*, die jeder reellen Zahl* t *mit* $f(t) \neq 0$ *einen J-selbstadjungierten Operator* E_t *zuordnet und durch die folgenden Eigenschaften 1)—5) eindeutig bestimmt ist* $(f(t) \neq 0 , \ f(s) \neq 0)$*:*

1) $E_{-\infty} = O , \ E_\infty = I , \ E_{t-0} = E_t$ *(diese Grenzwerte verstehen sich in der starken Operatorentopologie);*

2) $E_t E_s = E_{\min(s,t)}$*;*

3) $[E_t x , x]$ *ist für jedes* $x \in \mathfrak{H}$ *bei* $t = t_0$ *monoton nichtfallend, falls* $f(t_0) > 0$*, und monoton nichtwachsend, falls* $f(t_0) < 0$*;*

4) $E_t A = A E_t$*;*

5) $\sigma(A | \mathfrak{R}(E_t)) \subset (-\infty , t]$*;* $\sigma(A | \mathfrak{R}(I - E_t)) \subset [t , \infty)$[3].

Der Operator $f(A)$ *gestattet dann die Darstellung*

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t + N \tag{3}$$

mit einem J-nichtnegativen Operator N*, für den* $N^2 = O$ *und* $(E_{t_1} - E_{t_2}) N = O$ *gilt, falls das Intervall* $[t_1 , t_2]$ *keine Nullstellen von* f *enthält; das Integral in (3) existiert dabei als singuläres Integral in der starken Operatorentopologie mit Singularitäten in den Nullstellen des Polynoms* f[4].

---

[3]) $\mathfrak{R}(B)$ bezeichnet den Wertebereich, $\mathfrak{N}(B)$ den Nullraum eines linearen Operators B.

[4]) Sind $t_1 , t_2 , \ldots , t_n$ die Nullstellen von f, so ist also für jedes $x \in \mathfrak{H}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t x = \lim_{\xi'_1, \xi''_1, \ldots , \xi'_n, \xi''_n \downarrow 0} \int_{(-\infty, \infty) \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} (t_\nu - \xi'_\nu, t_\nu + \xi''_\nu)} f(t)\, dE_t x$$

Die Operatoren E_t sind eindeutig bestimmt durch die Beziehung

$$\frac{E_{t+0} - E_t}{2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_t}' (A - zI)^{-1}\, dz \; ; \tag{4}$$

dabei bezeichnet $\mathfrak{C}_t$ eine geschlossene, glatte, positiv orientierte Kurve, welche die reelle Achse nur in den Punkten t und $-\|A\|-1$, und zwar senkrecht, schneidet; der Strich am Integral besagt, dass es als Cauchyscher Hauptwert bezüglich der Singularität bei t aufzufassen ist; dieser existiert in der starken Operatorentopologie.

Aus den Beziehungen (3) und (4) folgt unmittelbar, dass für zwei vertauschbare J-selbstadjungierte Operatoren A und A' auch die zugehörigen Projektionen E_t, E_t' und nilpotenten Operatoren N, N' alle miteinander vertauschbar sind.

2. Weitere Hilfssätze

Wir stellen in diesem Abschnitt einige Lemmata bereit, die beim Beweis von Satz 3.1 benötigt werden. Dabei sei $\mathfrak{H}$ stets ein J-Raum für die Skalarprodukte $[x, y]$ und (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$.

Lemma 2.1. *Sind* E_1, E_2 *vertauschbare J-selbstadjungierte Projektionen mit* $\mathfrak{R}(E_1) \subset \mathfrak{P}_+$, $\mathfrak{R}(E_2) \subset \mathfrak{P}_+$, *dann liegt auch die lineare Hülle dieser beiden Wertebereiche in* $\mathfrak{P}_+$.

Beweis. Ist

$$x = E_1 x = E_1 (I - E_2)\, x + E_1 E_2 x\,, \qquad y = E_2 y = E_2 (I - E_1)\, y + E_1 E_2 y\,,$$

so gilt

$$\begin{aligned}
&[x+y, x+y] \\
&= [E_1 (I-E_2)\, x, E_1 (I-E_2)\, x] + [E_1 E_2 x, x] + [E_1 E_2 x, y] \\
&\quad + [E_2 (I-E_1)\, y, E_2 (I-E_1)\, y] + [E_1 E_2 y, x] + [E_1 E_2 y, y] \\
&\geqq [E_1 E_2 x, x] + [E_1 E_2 y, y] - 2\, [E_1 E_2 x, x]^{1/2}\, [E_1 E_2 y, y]^{1/2} \geqq 0\,,
\end{aligned}$$

denn das Produkt $E_1 E_2$ projiziert auf den Durchschnitt $\mathfrak{R}(E_1) \cap \mathfrak{R}(E_2)$, also auf einen J-nichtnegativen Teilraum.

Lemma 2.2. *Ist* $\mathfrak{N}_0$ *ein J-nullartiger Teilraum von* $\mathfrak{H}$, *dann bildet* $\mathfrak{N}_0^{+} / \mathfrak{N}_0$, *aufgefasst als Teilraum* $\mathfrak{H}'$ *von* $\mathfrak{H}$, *wieder einen J-Raum für die Skalarprodukte* $[x, y]$ *und* (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$, *d.h. für dieselben Skalarprodukte wie der Ausgangsraum* $\mathfrak{H}$.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{P}_0$ sind die Teilräume $\mathfrak{N}_0$ und $J\,\mathfrak{N}_0$ orthogonal, und zwar gilt offensichtlich

$$\mathfrak{N}_0 \oplus J\,\mathfrak{N}_0 = P_+\,\mathfrak{N}_0 \oplus P_-\,\mathfrak{N}_0\,.$$

Nun ist weiter $\mathfrak{N}_0^\perp = \mathfrak{H} \ominus J\,\mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_0$, also

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_0^\perp / \mathfrak{N}_0 &= (\mathfrak{H} \ominus J\,\mathfrak{N}_0) \ominus \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{H} \ominus (J\,\mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{N}_0) \\ &= \mathfrak{H} \ominus (P_+\,\mathfrak{N}_0 \oplus P_-\,\mathfrak{N}_0)\,,\end{aligned}$$

woraus leicht die Behauptung folgt.

Es sei jetzt $\mathfrak{N}_0$ wieder ein J-nullartiger Teilraum von $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{L}$ ein Teilraum von $\mathfrak{N}_0^\perp$ und setzen wir

$$\mathfrak{L}^{\dot\perp} = \mathfrak{L}^\perp \cap \mathfrak{N}_0^\perp\,,$$

so gilt

$$(\mathfrak{L}^{\dot\perp})^{\dot\perp} = \overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{N}_0}\,. \tag{5}$$

Um das zu sehen, beachten wir zunächst die Beziehung

$$(\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{N}_0})^\perp = \mathfrak{L}^\perp \cap \mathfrak{N}_0^\perp = \mathfrak{L}^{\dot\perp}\,.$$

Sei $\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{N}_0} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{N}_0$ mit $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{H}'$, wenn $\mathfrak{H}'$ dieselbe Bedeutung hat wie im vorangehenden Lemma. Dann gilt $\mathfrak{L}^{\dot\perp} = \mathfrak{L}_1^{\perp'} \oplus \mathfrak{N}_0$, wenn $\mathfrak{L}_1^{\perp'}$ das J-orthogonale Komplement von $\mathfrak{L}_1$ in $\mathfrak{H}'$ bezeichnet, und

$$(\mathfrak{L}^{\dot\perp})^{\dot\perp} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{N}_0 = \overline{\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{N}_0}\,,$$

was zu zeigen war.

Lemma 2.3. *Es sei $\mathfrak{F}$ eine Familie paarweise orthogonaler*[5]*, J-selbstadjungierter Projektionen in $\mathfrak{H}$. Dann lässt sich jedes duale Paar $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$, das invariant ist bezüglich aller Operatoren $F \in \mathfrak{F}$, erweitern zu einem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max}, \mathfrak{L}_-^{\max}\}$, das ebenfalls invariant ist bezüglich aller $F \in \mathfrak{F}$.*

Beweis. Für beliebiges $F \in \mathfrak{F}$ bildet $\mathfrak{R}(F)$ wieder einen J-Raum für das Skalarprodukt $[x, y]$ ($x, y \in \mathfrak{R}(F)$) und ein geeignetes positiv definites Skalarprodukt. Man sieht leicht, dass $\{F\,\mathfrak{L}_+, F\,\mathfrak{L}_-\}$ ein duales Paar in $\mathfrak{R}(F)$ ist. Dieses erweitern wir gemäss Aussage (A) zu einem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{(F)}, \mathfrak{L}_-^{(F)}\}$ in $\mathfrak{R}(F)$ und setzen anschliessend[6])

$$\mathfrak{L}_\pm^0 = \overline{\mathfrak{L}_\pm + \text{l. H.}\{\,\mathfrak{L}_\pm^{(F)} \mid F \in \mathfrak{F}\,\}}\,.$$

Dann bilden die Teilräume $\mathfrak{L}_+^0, \mathfrak{L}_-^0$ ein duales Paar in $\mathfrak{H}$. Um das zu sehen, wählen wir z. B. $x \in \mathfrak{L}_+$; $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}$, $F_j \neq F_k$

---

[5]) D. h. es ist $F\,F' = O$ für $F, F' \in \mathfrak{F}$, $F \neq F'$.

[6]) Wir schreiben: l. H. = lineare Hülle; a. l. H. = abgeschlossene lineare Hülle.

$(j \neq k\,; \quad j, k = 1, 2, \dots, n)$ und $y_j \in \mathfrak{L}_+^{(F_j)}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Dann ergibt sich

$$\left[x + \sum_{j=1}^{n} y_j\,,\ x + \sum_{j=1}^{n} y_j\right]$$
$$= \left[\left(I - \sum_{j=1}^{n} F_j\right) x\,,\ \left(I - \sum_{j=1}^{n} F_j\right) x\right] + \sum_{j=1}^{n} [F_j\,(x+y_j)\,, x+y_j] \geqq 0\,,$$

also gilt $\mathfrak{L}_+^0 \subset \mathfrak{P}_+$ und ebenso $\mathfrak{L}_-^0 \subset \mathfrak{P}_-$. Die Teilräume $\mathfrak{L}_+^0$, $\mathfrak{L}_-^0$ sind auch zueinander J-orthogonal, denn es gilt $\mathfrak{L}_+ \perp \mathfrak{L}_-$, $\mathfrak{L}_+^{(F)} \perp \mathfrak{L}_-^{(\hat{F})}$ sowie $\mathfrak{L}_+^{(F)} \perp \mathfrak{L}_-$, $\mathfrak{L}_-^{(F)} \perp \mathfrak{L}_+$ $(F, \hat{F} \in \mathfrak{F})$. Die letzte Beziehung ergibt sich z. B. folgendermassen:

$$[\mathfrak{L}_-^{(F)}, \mathfrak{L}_+] = [F\,\mathfrak{L}_-^{(F)}, \mathfrak{L}_+] \subset [\mathfrak{L}_-^{(F)}, \mathfrak{L}_+^{(F)}] = \{0\}\,.$$

Wir erweitern das duale Paar wiederum nach Aussage (A) zu einem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max}, \mathfrak{L}_-^{\max}\}$ und zeigen, dass dieses noch invariant ist bezüglich aller Operatoren der Familie $\mathfrak{F}$. Das folgt z. B. für $\mathfrak{L}_+^{\max}$ aus den Beziehungen

$$[F\,\mathfrak{L}_+^{\max}, \mathfrak{L}_-^{(F)}] = [\mathfrak{L}_+^{\max}, F\,\mathfrak{L}_-^{(F)}] = [\mathfrak{L}_+^{\max}, \mathfrak{L}_-^{(F)}] = \{0\}\,,$$
$$F\,\mathfrak{L}_+^{\max} \subset (\mathfrak{L}_-^{(F)})^{\perp} \cap \mathfrak{R}(F) = \mathfrak{L}_+^{(F)} \subset \mathfrak{L}_+^{\max}\,.$$

Lemma 2.4. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$ ein J-nullartiger Teilraum, der invariant ist für alle Operatoren der Familie $\mathfrak{A}$: $A\,\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$ $(A \in \mathfrak{A})$. Dann gibt es einen Teilraum $\mathfrak{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{P}_0$;
2) $A\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$ $(A \in \mathfrak{A})$;
3) $\overline{(A\,\mathfrak{N}_0^{\perp} + \mathfrak{N}_0)} \cap (A\,\mathfrak{N}_0^{\perp})^{\perp} \subset \mathfrak{N}_0$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Beweis. Wir betrachten die Menge aller J-nullartigen Teilräume von $\mathfrak{H}$, die invariant sind für alle Operatoren der Familie $\mathfrak{A}$. Diese Menge ist teilweise geordnet bezüglich der mengentheoretischen Inklusion. Dabei hat jede Kette eine obere Schranke, nämlich die Abschliessung der Vereinigung ihrer Elemente. Nach dem Satz von Zorn gibt es folglich ein maximales Element $\mathfrak{N}_0$ dieser Menge, das $\mathfrak{N}$ enthält, und es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{N}_0$ auch die Eigenschaft 3) hat.

Für beliebiges $A_0 \in \mathfrak{A}$ betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{L}_0 = \overline{(A_0\,\mathfrak{N}_0^{\perp} + \mathfrak{N}_0)} \cap (A_0\,\mathfrak{N}_0^{\perp})^{\perp}\,.$$

Aus $A_0\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$ folgt $A_0\,\mathfrak{N}_0^{\perp} \subset \mathfrak{N}_0^{\perp}$; ausserdem gilt $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0^{\perp}$, deshalb ist

$$\overline{A_0\,\mathfrak{N}_0^{\perp} + \mathfrak{N}_0} \subset \mathfrak{N}_0^{\perp}\,,$$

also

(6) $$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{N}_0^{\dot{+}}\,.$$

Weiter besteht gemäss (5) die Beziehung

$$\overline{A_0\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}} + \mathfrak{N}_0} = (A_0\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}})^{\dot{\perp}\dot{\perp}}$$

($\dot{\perp}$ bezeichnet wieder das J-orthogonale Komplement innerhalb $\mathfrak{N}_0^{\dot{+}}$), also gilt

(7) $$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{P}_0\,.$$

Aus (6) und (7) ergibt sich aber sofort, dass der Teilraum $\overline{\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{N}_0}$ in $\mathfrak{P}_0$ enthalten ist und $\mathfrak{N}$ enthält. Weiter folgt aus $A\,(A_0\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}}) = A_0(A\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}}) \subset A_0\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}}$ und $A\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$, dass jeder Operator $A \in \mathfrak{A}$ die Menge $\overline{\mathfrak{N}_0 + \mathfrak{L}_0}$ in sich abbildet. Da $\mathfrak{N}_0$ bezüglich dieser beiden Eigenschaften maximal ist, erhalten wir $\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{N}_0$, was zu zeigen war.

3. Invariante Teilräume kommutativer Familien definisierbarer J-selbstadjungierter Operatoren

Das Hauptergebnis dieser Note bildet der folgende

Satz 3.1. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren,* $\mathfrak{F}$ *eine Familie paarweise orthogonaler. J-selbstadjungierter Projektionen in* $\mathfrak{H}$ *und es gelte* $AF = FA$ $(A \in \mathfrak{A}\,,\ F \in \mathfrak{F}\,)$. *Weiter existiere zu jedem Paar* $(A\,;F) \in \mathfrak{A}\times\mathfrak{F}$ *eine natürliche Zahl* $n(A\,;F)$ *und eine reelle Zahl* $\alpha(A\,;F)$ *mit der Eigenschaft, dass einer der beiden Operatoren* $\pm\,(A - \alpha(A\,;F)\,I)^{n(A;F)}\,F$ *J-nichtnegativ ist. Dann existiert ein Teilraum* $\mathfrak{L}_{+}^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle Operatoren* F *und* AF $(\,A \in \mathfrak{A}\,,\ F \in \mathfrak{F}\,)$.

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

1. Es bezeichne $\mathfrak{B}$ die Menge aller Operatoren B der Gestalt $B = (A - \alpha(A\,;F)\,I)\,F$ $(\,A \in \mathfrak{A}\,,\ F \in \mathfrak{F}\,)$. Dann gibt es nach Voraussetzung zu jedem $B \in \mathfrak{B}$ eine natürliche Zahl $n(B)$, so dass einer der Operatoren $\pm B^{n(B)}$ J-nichtnegativ ist. Offensichtlich sind die Operatoren $B \in \mathfrak{B}$ alle J-selbstadjungiert und untereinander sowie mit allen Operatoren aus $\mathfrak{F}$ vertauschbar. Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass die Operatoren der Familie $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{F}$ einen gemeinsamen invarianten Teilraum $\mathfrak{L}_{+}^{\max} \in \mathfrak{M}_+$ haben.

2. Gemäss Lemma 2.4 gibt es einen Teilraum $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{P}_0$ mit den Eigenschaften $B\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$, $F\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$ und

(8) $$\overline{(B\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}} + \mathfrak{N}_0)} \cap (B\,\mathfrak{N}_0^{\dot{+}})^{\dot{\perp}} \subset \mathfrak{N}_0 \qquad (\,B \in \mathfrak{B}\,,\ F \in \mathfrak{F}\,).$$

Der mit einem Teilraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ identifizierte Faktorraum $\mathfrak{N}_0^{\perp} / \mathfrak{N}_0$ ist nach Lemma 2.2 ein J-Raum bezüglich der gleichen Skalarprodukte wie der Ausgangsraum $\mathfrak{H}$. Da die Operatoren aus $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{F}$ den Teilraum $\mathfrak{N}_0$, also auch $\mathfrak{N}_0^{\perp}$ invariant lassen, induzieren sie durch die Gleichungen $B' x' = (B x)'$ und $F' x' = (F x)'$ Operatoren B', F' in $\mathfrak{H}'$; dabei bezeichnet x' das dem Element $x \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$ bei der Faktorraumbildung zugeordnete Element von $\mathfrak{H}'$. Die Operatoren B', F' $(B \in \mathfrak{B}$, $F \in \mathfrak{F})$ sind wieder J-selbstadjungiert, alle miteinander vertauschbar, die $\mathfrak{F}'$ paarweise orthogonal und idempotent und für die natürliche Zahl $n(B') = n(B)$ gilt noch, dass einer der Operatoren $\pm (B')^{n(B')}$ J-nichtnegativ ist. Wir überlegen uns, dass für beliebiges $B \in \mathfrak{B}$ die Beziehung

$$\overline{\mathfrak{R}(B') + \mathfrak{N}(B')} = \mathfrak{H}', \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{R}(B')^{\perp} \cap \mathfrak{N}(B')^{\perp} = \{0\}, \tag{9}$$

besteht.

Sei x_0' ein Element von $\mathfrak{R}(B')^{\perp} \cap \mathfrak{N}(B')^{\perp}$. Aus $x_0' \in \mathfrak{R}(B')^{\perp}$ folgt $[x_0', (B y)'] = 0$, d. h. $[x_0, B y] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$, wenn x_0 einen beliebigen Repräsentanten von x_0' bezeichnet. Also gilt $x_0 \in (B\, \mathfrak{N}_0^{\perp})^{\dot{\perp}}$. Weiter ist $x_0' \in (\mathfrak{N}(B'))^{\perp}$ gleichbedeutend mit $[x_0', y'] = 0$ für alle y' mit $B' y' = 0$, d. h. $[x_0, y] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$ mit $B y \in \mathfrak{N}_0$. Mit

$$B^{-1}(\mathfrak{N}_0) = \{ y \mid y \in \mathfrak{N}_0^{\perp}, \; B y \in \mathfrak{N}_0 \}$$

gilt also $x_0 \perp B^{-1}(\mathfrak{N}_0)$. Wir zeigen, dass die Gleichung

$$B^{-1}(\mathfrak{N}_0) = (B\, \mathfrak{N}_0^{\perp})^{\dot{\perp}} \tag{10}$$

besteht. In der Tat ist $z \perp B\, \mathfrak{N}_0^{\perp}$, $z \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$ gleichbedeutend mit $[B\, \mathfrak{N}_0^{\perp}, z] = \{0\}$, $z \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$, d. h. mit $B z \in \mathfrak{N}_0^{\perp\perp} = \mathfrak{N}_0$, $z \in \mathfrak{N}_0^{\perp}$. Aus (10) folgt aber

$$(B^{-1}(\mathfrak{N}_0))^{\dot{\perp}} = (B\, \mathfrak{N}_0^{\perp})^{\dot{\perp}\dot{\perp}},$$

und gemäss (5) schliesslich

$$(B^{-1}(\mathfrak{N}_0))^{\dot{\perp}} = \overline{B\, \mathfrak{N}_0^{\perp} + \mathfrak{N}_0}.$$

Also gehört x_0 auch zu

$$\overline{B\, \mathfrak{N}_0^{\perp} + \mathfrak{N}_0}.$$

Auf Grund der Beziehung (8) gilt somit $x_0 \in \mathfrak{N}_0$, d. h. $x_0' = 0$, was zu zeigen war.

3. Es sei für ein $B \in \mathfrak{B}$ der zugehörige Exponent $n = n(B)$ mit

der Eigenschaft, dass $\pm(B')^n$ J-nichtnegativ ist, grösser oder gleich drei. Dann gilt für $y' \in \mathfrak{H}'$ und $z' \in \mathfrak{N}(B')$

$$[(B')^{n-2}(B'y' + z') \, , \, B'y' + z'] = [(B')^n y' , y'] \, ,$$

also ist auf Grund von (9) sogar einer der Operatoren $\pm(B')^{n-2}$ J-nichtnegativ. Daraus folgt, dass für jedes $B \in \mathfrak{B}$ einer der Operatoren $\pm B'$ oder $\pm(B')^2$ J-nichtnegativ ist, je nachdem, ob der Exponent $n(B)$ ungerade oder gerade ist.

Für einen maximalen J-nichtnegativen Teilraum $\mathfrak{L}_+'^{\max}$ von $\mathfrak{H}'$ bildet $\mathfrak{L}_+^{\max} = \mathfrak{L}_+'^{\max} + \mathfrak{N}_0$ einen maximalen J-nichtnegativen Teilraum von $\mathfrak{H}$, denn es gilt $P_+ \mathfrak{L}_+^{\max} = (\mathfrak{H}_+ \ominus P_+ \mathfrak{N}_0) \oplus P_+ \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{H}_+$. Ist dabei $\mathfrak{L}_+'^{\max}$ invariant für alle Operatoren B' und F' $(B \in \mathfrak{B}, F \in \mathfrak{F})$, so ist $\mathfrak{L}_+^{\max}$ invariant für alle Operatoren $B \in \mathfrak{B}$, $F \in \mathfrak{F}$. Der Satz ist somit bewiesen, wenn wir die Richtigkeit der folgenden Aussage zeigen:

Es sei $\mathfrak{B}$ *eine kommutative Familie beschränkter* J*-selbstadjungierter Operatoren* B *mit der Eigenschaft, dass*

$$\overline{\mathfrak{R}(B) + \mathfrak{N}(B)} = \mathfrak{H}\,, \quad d.\,h. \quad \overline{\mathfrak{R}(B)} \cap \mathfrak{N}(B) = \{0\}\,, \tag{11}$$

und einer der Operatoren B, B^2, $-B^2$ J*-nichtnegativ ist. Weiter sei* $\mathfrak{F}$ *eine Familie paarweise orthogonaler,* J*-selbstadjungierter Projektionen* F *in* $\mathfrak{H}$ *mit* $BF = FB$ $(B \in \mathfrak{B}, F \in \mathfrak{F})$. *Dann existiert ein maximaler* J*-nichtnegativer Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max}$ *von* $\mathfrak{H}$, *der invariant ist für alle Operatoren aus* $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{F}$.

4. Es bezeichnen im Folgenden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Menge derjenigen Operatoren $B \in \mathfrak{B}$, für die B, $+B^2$ bzw. $-B^2$ J-nichtnegativ ist. Dann besteht für jedes $U \in \mathfrak{U}$ eine Darstellung (3):

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t^{(U)} + N^{(U)} \, .$$

Dabei gilt gemäss den Bemerkungen im Anschluss an (3) einerseits

$$U N^{(U)} = 0 \, , \quad \text{d. h.} \quad \overline{\mathfrak{R}(N^{(U)})} \subset \mathfrak{N}(U) \, ,$$

andererseits aber auch

$$N^{(U)} x = U x - \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t^{(U)} x$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Bigg(U x - \int_{(-\infty,\infty)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} t \, dE_t^{(U)} x \Bigg) \in \overline{\mathfrak{R}(U)} \, ,$$

d. h. $\overline{\mathfrak{R}(N^{(U)})} \subset \overline{\mathfrak{R}(U)}$. Auf Grund von (11) ist somit $N^{(U)} = O$, also

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t^{(U)} . \tag{12}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_+^{(U)} &= \text{a. l. H.} \{ \mathfrak{R}(I - E_t^{(U)}) \mid t > 0 \} , \\ \mathfrak{S}_-^{(U)} &= \text{a. l. H.} \{ \mathfrak{R}(E_t^{(U)}) \mid t < 0 \} , \\ \mathfrak{S}_\pm &= \text{a. l. H.} \{ \mathfrak{S}_\pm^{(U)} \mid U \in \mathfrak{U} \} . \end{aligned} \tag{13}$$

Dann gilt auf Grund von Lemma 2.1

$$\mathfrak{S}_+ \subset \mathfrak{P}_+ , \quad \mathfrak{S}_- \subset \mathfrak{P}_- . \tag{14}$$

Ausserdem ist für $t < 0$, $t' > 0$ und $U, U' \in \mathfrak{U}$ stets $E_t^{(U)} (I - E_{t'}^{(U')}) = O$, denn der Durchschnitt der Wertebereiche der links stehenden Projektionen besteht nur aus dem Nullelement. Deshalb gilt auch

$$\mathfrak{S}_+ \perp \mathfrak{S}_- . \tag{15}$$

Mit (12) folgt wegen $E_t^{(U)} x = 0$ für $t < 0$ und $x \in (\mathfrak{S}_-^{(U)})^\perp$ weiter

$$U (\mathfrak{S}_-)^\perp \subset U (\mathfrak{S}_-^{(U)})^\perp \subset \mathfrak{S}_+^\perp \subset \mathfrak{S}_+ \qquad (U \in \mathfrak{U}).$$

Schliesslich setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_+ &= \mathfrak{S}_+ + \text{l. H.} \{ \overline{\mathfrak{R}(V)} \mid V \in \mathfrak{V} \} , \\ \mathfrak{L}_- &= \mathfrak{S}_- + \text{l. H.} \{ \overline{\mathfrak{R}(W)} \mid W \in \mathfrak{W} \} \end{aligned}$$

und zeigen, dass diese Mengen zueinander J-orthogonal sind. Auf Grund von (15) brauchen wir dazu nur noch die Beziehungen

$$\overline{\mathfrak{R}(V)} \perp \mathfrak{S}_- , \quad \overline{\mathfrak{R}(W)} \perp \mathfrak{S}_+ , \quad \overline{R(V)} \perp \overline{\mathfrak{R}(W)} \tag{16}$$

zu beweisen ($V \in \mathfrak{V}$, $W \in \mathfrak{W}$). Zunächst bemerken wir, dass aus (11) ohne Schwierigkeit

$$\overline{\mathfrak{R}(V^2)} = \overline{\mathfrak{R}(V)} , \quad \overline{\mathfrak{R}(W^2)} = \overline{\mathfrak{R}(W)}$$

folgt. Dann ergibt sich für $x, y \in \mathfrak{H}$

$$|[V^2 x , W^2 y]| \leqq [V^2 W x , W x] [V^2 W y , W y] = 0 ,$$

womit die dritte Beziehung von (16) bewiesen ist. Entsprechend beweist man die ersten beiden.

Weiter gilt $\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{P}_+$, $\mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{P}_-$. Dazu ist es z. B. für die zweite

Beziehung hinreichend zu zeigen, dass für eine beliebige endliche Anzahl $W_1, W_2, \dots, W_m \in \mathfrak{W}$ die Inklusion

$$\text{l. H.}\{\, \mathfrak{R}(E_t^{(U)}) \mid t < 0\,,\; U \in \mathfrak{U}\,\} + \text{l. H.}\{\, \mathfrak{R}(W_\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, m\,\} \subset \mathfrak{P}_-$$

besteht. Sie sei bewiesen für $m \leqq m_0$. Wir betrachten ein beliebiges Element

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} x_\nu + \sum_{\mu=1}^{m_0+1} W_\mu y_\mu\,;$$

dabei sei $E^{(\nu)} = E_{t_\nu}^{(U_\nu)}$ $(U_\nu \in \mathfrak{U}\,,\; t_\nu < 0\,;\; \nu = 1, 2, \dots, n)$ und $W_1, W_2, \dots, W_{m_0+1} \in \mathfrak{W}$. Dann gibt es auf Grund von (11) Folgen $(x_\nu^{(l)})_{l=1,2,..}$ und $(y_\mu^{(l)})_{l=1,2,\dots}$ mit

$$x_\nu^{(l)} = W_{m_0+1}\,\tilde{x}_\nu^{(l)} + \tilde{\tilde{x}}_\nu^{(l)}\,; \qquad y_\mu^{(l)} = W_{m_0+1}\,\tilde{y}_\mu^{(l)} + \tilde{\tilde{y}}_\mu^{(l)}$$

$(\tilde{\tilde{x}}_\nu^{(l)}, \tilde{\tilde{y}}_\mu^{(l)} \in \mathfrak{N}(W_{m_0+1}))\,;\; \nu = 1, 2, \dots, n\,;\; \mu = 1, 2, \dots, m_0\,;\; l = 1, 2, \dots)$, die gegen x_ν bzw. y_μ konvergieren. Damit erhalten wir

$$[z, z] = \lim_{l\to\infty} \Biggl\{ \Biggl[W_{m_0+1}^2 \Biggl(y_{m_0+1} + \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \tilde{x}_\nu^{(l)} + \sum_{\mu=1}^{m_0} W_\mu \tilde{y}_\mu^{(l)} \Biggr),\; y_{m_0+1} + \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \tilde{x}_\nu^{(l)} + \sum_{\mu=1}^{m_0} W_\mu \tilde{y}_\mu^{(l)} \Biggr]$$
$$+ \Biggl[\sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \tilde{\tilde{x}}_\nu^{(l)} + \sum_{\mu=1}^{m_0} W_\mu \tilde{\tilde{y}}_\mu^{(l)},\; \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \tilde{\tilde{x}}_\nu^{(l)} + \sum_{\mu=1}^{m_0} W_\mu \tilde{\tilde{y}}_\mu^{(l)} \Biggr] \Biggr\}.$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite sind aber nichtpositiv: Der erste, weil $W_{m_0+1}^2$ J-nichtnegativ ist, der zweite nach Induktionsvoraussetzung.

Offensichtlich sind $\mathfrak{L}_+$ und $\mathfrak{L}_-$ invariant für alle Operatoren aus $\mathfrak{F}$. Gemäss Lemma 2.3 erweitern wir das duale Paar der Abschliessungen von $\mathfrak{L}_+$ und $\mathfrak{L}_-$ zu einem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max}, \mathfrak{L}_-^{\max}\}$, das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren der Familie $\mathfrak{F}$. Dann gilt auch für $U \in \mathfrak{U}$, $V \in \mathfrak{V}$, $W \in \mathfrak{W}$:

$$U\,\mathfrak{L}_+^{\max} \subset U\,(\mathfrak{L}_-)^\perp \subset U\,(\mathfrak{S}_-)^\perp \subset \mathfrak{S}_+ \subset \mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_+^{\max}\,,$$
$$V\,\mathfrak{L}_+^{\max} \subset \mathfrak{R}(V) \subset \mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_+^{\max}\,,$$
$$W\,\mathfrak{L}_+^{\max} \subset W\,\mathfrak{L}_-^\perp \subset W\,(\mathfrak{R}(W))^\perp = \{0\}\,,$$

was zu zeigen war.

Wir formulieren jetzt zunächst zwei unmittelbare Folgerungen von Satz 3.1.

Folgerung 3.1. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Familie* J*-selbstadjungierter Operatoren mit der Eigenschaft, dass zu jedem* $A \in \mathfrak{A}$ *eine reelle Zahl* $\alpha(A)$ *und eine natürliche Zahl* $n(A)$ *existieren, so dass einer der Operatoren* $\pm(A - \alpha(A)\, I)^{n(A)}$ J*-nichtnegativ ist. Dann gibt es einen Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

E. Pesonen betrachtet in [13] J-selbstadjungierte Operatoren, die der folgenden Bedingung genügen:

(P) *Aus* $[x, x] = 0$ *und* $[A\,x, x] = 0$ *folgt stets* $x = 0$.

In diesem Falle gilt gemäss [13] genau eine der folgenden beiden Aussagen (P_+), (P_-):

(P_+) *Aus* $[x, x] = 0$ *und* $x \neq 0$ *folgt stets* $[A\,x, x] > 0$.

(P_-) *Aus* $[x, x] = 0$ *und* $x \neq 0$ *folgt stets* $[A\,x, x] < 0$.

An Stelle von (P_+), (P_-) betrachten wir die schwächeren Bedingungen (P'_+), (P'_-):

(P'_+) *Aus* $[x, x] = 0$ *folgt stets* $[A\,x, x] \geqq 0$.

(P'_-) *Aus* $[x, x] = 0$ *folgt stets* $[A\,x, x] \leqq 0$.

Unter der Voraussetzung (P'_+) (bzw. (P'_-)) existiert nach einem Lemma von R. Kühne [6] für den Operator A eine reelle Zahl α, so dass $A - \alpha I$ (bzw. $-(A - \alpha I)$) J-nichtnegativ ist. Damit erhalten wir die

Folgerung 3.2. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Familie* J*-selbstadjungierter Operatoren* A, *deren jeder einer der Bedingungen* (P'_+), (P'_-) *genügt. Dann gibt es einen Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

Nach den vorangehenden Bemerkungen ist die Voraussetzung dieser Folgerung 3.2 erfüllt, falls alle Operatoren der Familie $\mathfrak{A}$ der Bedingung (P) genügen.

Als weitere Folgerung von Satz 3.1 beweisen wir jetzt den

Satz 3.2. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine endliche kommutative Familie definisierbarer* J*-selbstadjungierter Operatoren. Dann gibt es einen Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Die Familie $\mathfrak{A}$ bestehe aus den Operatoren $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen (siehe Aussage (B)), dass zu jedem dieser Operatoren sogar ein definisierendes Polynom mit lauter reellen Nullstellen existiert. Ist z. B.

$$f_1(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n_1} (\lambda - \alpha_1^{(\nu)})^{k_1^{(\nu)}}$$

ein solches für den Operator A_1, so wählen wir im Falle $n_1 > 1$ reelle Zahlen $\beta_1^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n_1 - 1)$ mit der Eigenschaft

$$-\infty = \beta_1^{(0)} < \alpha_1^{(1)} < \beta_1^{(1)} < \alpha_1^{(2)} < \beta_1^{(2)} < \dots < \beta_1^{(n_1-1)} < \alpha_1^{(n_1)} < \beta_1^{(n_1)} = \infty .$$

Dann sind die Projektionen

$$E^{(\nu)} = E^{(A_1)}_{\beta_1^{(\nu)}} - E^{(A_1)}_{\beta_1^{(\nu-1)}}$$

paarweise J-orthogonal. Ist

$$f_1^{(\nu)}(\lambda) = f_1(\lambda)\,(\lambda - \alpha_1^{(\nu)})^{-k_1^{(\nu)}}$$

im Intervall $(\beta_1^{(\nu-1)}, \beta_1^{(\nu)})$ positiv (bzw. negativ), so ist der Operator $(A_1 - \alpha_1^{(\nu)} I)^{k_1^{(\nu)}} E^{(\nu)}$ (bzw. $-(A_1 - \alpha_1^{(\nu)} I)^{k_1^{(\nu)}} E^{(\nu)}$) J-nichtnegativ ($\nu = 1, 2, \dots, n_1$). Im ersten Fall gilt nämlich z. B.

$$\begin{aligned} 0 &\leqq [f_1(A_1) E^{(\nu)} x\,,\ x] = [f_1^{(\nu)}(A_1)\,(A_1 - \alpha_1^{(\nu)} I)^{k_1^{(\nu)}} E^{(\nu)} x\,,\ x] \\ &= [(A_1 - \alpha^{(\nu)} I)^{k_1^{(\nu)}} E^{(\nu)} y\,,\ y]\,, \quad y = (f_1^{(\nu)}(A_1))^{1/2} E^{(\nu)} x\,; \end{aligned}$$

der Wertebereich des Operators $(f_1^{(\nu)}(A_1))^{1/2} E^{(\nu)}$ fällt aber mit $\mathfrak{R}(E^{(\nu)})$ zusammen ($\nu = 1, 2, \dots, n_1$). Anschliessend zerlegen wir jeden der J-Räume $\mathfrak{R}(E^{(\nu)})$ ($\nu = 1, 2, \dots, n_1$) in der gleichen Weise für den Operator A_2 etc. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir auf diese Weise endlich viele J-Räume $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_r$, die Wertebereiche der J-selbstadjungierten Projektionen $F_1, F_2, \dots, F_r$ seien, so dass $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2 \dotplus \dots \dotplus \mathfrak{H}_r$, d. h.

$$F_1 + F_2 + \dots + F_r = I \tag{17}$$

gilt und zu jedem Paar $(A_\nu\,; F_\varrho)$ eine reelle Zahl $\alpha(\nu\,;\varrho)$ und eine natürliche Zahl $n(\nu\,;\varrho)$ existieren, so dass einer der Operatoren $\pm (A_\nu - \alpha(\nu\,;\varrho)\, I)^{n(\nu;\varrho)} F_\varrho$ J-nichtnegativ ist ($\nu = 1, 2, \dots, n\,;\ \varrho = 1, 2, \dots, r$). Nach Satz 3.1 gibt es einen Teilraum $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, der invariant ist für alle Operatoren F_ϱ und $A_\nu F_\varrho$. Auf Grund von (17) ist er dann auch invariant für die Operatoren $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung ergibt sich jetzt die Aussage von Satz 3.2 auch für kommutative Familien beliebiger Mächtigkeit. Zu diesem Zweck führen wir die zu einer Zerlegung (1) des J-Raumes $\mathfrak{H}$ gehörige Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

des J-selbstadjungierten Operators A ein. Ist $\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}_+$ und K der zugehörige Winkeloperator von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$, $\|K\| \leqq 1$, so sieht man leicht, dass $\mathfrak{L}_+$ genau dann invariant ist bezüglich A, wenn gilt:

$$-A_{12}^* + A_{22} K = K\,(A_{11} + A_{12} K)\,. \tag{18}$$

Satz 3.3. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Familie definisierbarer J-selbstadjungierter Operatoren, und es gebe eine solche Zerlegung (1) von $\mathfrak{H}$, dass* *für jedes* $A \in \mathfrak{A}$ *der Operator* $P_+ A P_-$ *vollstetig ist. Dann existiert ein Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

Nach der vorangehenden Bemerkung ist der Satz bewiesen, wenn wir die Existenz eines Operators K_0 von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$, $\|K_0\| \leqq 1$, zeigen, welcher der Gleichung (18) für alle $A \in \mathfrak{A}$ genügt. Zu diesem Zweck wählen wir eine beliebige endliche Teilmenge $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ von $\mathfrak{A}$ und bezeichnen mit $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)$ die Menge aller Operatoren K von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$, $\|K\| \leqq 1$, die der Gleichung (18) für alle $A = A_1, A_2, \dots, A_n$ genügen. Gemäss Satz 3.2 ist $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n) \neq \emptyset$, und man sieht leicht, dass diese Menge auf Grund der vorausgesetzten Vollstetigkeit von $P_+ A P_-$ abgeschlossen ist in der schwachen Operatorentopologie. Die Mengen $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ($n = 1, 2, \dots$; $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$) bilden somit ein zentriertes System abgeschlossener nicht leerer Teilmengen der in der schwachen Operatorentopologie kompakten Einheitskugel des Raumes aller beschränkten Abbildungen von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$. Dann ist aber ihr Durchschnitt nicht leer, d. h., es gibt einen Operator K_0 von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathfrak{H}_-$, $\|K_0\| \leqq 1$, der die Gleichung (18) für alle $A \in \mathfrak{A}$ erfüllt.

In einem J-Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ ist bekanntlich (vgl. z. B. [2], [4]) jeder J-selbstadjungierte Operator A definisierbar. Wählt man nämlich z. B. im Falle $\dim \mathfrak{H}_- = \varkappa$ einen $\varkappa$-dimensionalen J-nichtpositiven, für A invarianten Teilraum $\mathfrak{L}_- \in \mathfrak{M}_-$ (ein solcher existiert auf Grund des in der Einleitung zitierten Ergebnisses von L. S. Pontrjagin [15]) und bezeichnet mit p das Minimalpolynom der Einschränkung von A auf $\mathfrak{L}_-$, so gilt $p(A)\, \mathfrak{L}_- = \{0\}$, also $[(p(A))^+ y, x] = [y, p(A)\, x] = 0$ für $y \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{L}_-$, d. h. $\mathfrak{R}((p(A))^+) \subset \mathfrak{L}_-^\perp \subset \mathfrak{P}_+$, also ist $p(A)\,(p(A))^+$ J-nichtnegativ. Aus Satz 3.3 ergibt sich damit das folgende Resultat von M. A. Naĭmark [12]:

Folgerung 3.3. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren in einem J-Raum von Typ* $\Pi_\varkappa$. *Dann gibt es einen Teilraum* $\mathfrak{L}_+^{\max} \in \mathfrak{M}_+$, *der invariant ist für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

4. Erweiterungen invarianter dualer Paare von Teilräumen

Es ist bis jetzt nicht bekannt, ob sich Satz 3.1 in der Weise verschärfen lässt, dass sogar jedes duale Paar $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ von Teilräumen des J-Raumes $\mathfrak{H}$, das invariant ist für alle Operatoren F und $A F$ ($A \in \mathfrak{A}$, $F \in \mathfrak{F}$; die Familien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ sollen denselben Voraussetzungen wie in Satz 3.1 genügen), zu einem maximalen dualen Paar erweitert werden kann, das ebenfalls invariant ist für diese Operatoren. Aus Satz 3.1 folgt jedoch leicht der

Satz 4.1. *Die Familien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{F}$ *sollen denselben Voraussetzungen wie in Satz 3.1 genügen,* $\{\mathfrak{L}_+ , \mathfrak{L}_-\}$ *sei ein duales Paar, das für alle Operatoren* F *und* $A\,F$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$ *invariant ist und dessen Teilräume sich in der Form*

$$\mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L}_+^0 + \mathfrak{L}_+^1 , \qquad \mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_-^0 + \mathfrak{L}_-^1 \tag{19}$$

darstellen lassen mit J-nullartigen Teilräumen $\mathfrak{L}_+^0$, $\mathfrak{L}_-^0$ *und J-projektionsvollständigen Teilräumen* $\mathfrak{L}_+^1$, $\mathfrak{L}_-^1$. *Dann lässt sich* $\{\mathfrak{L}_+ , \mathfrak{L}_-\}$ *erweitern zu einem maximalen dualen Paar* $\{\mathfrak{L}_+^{\max} , \mathfrak{L}_-^{\max}\}$, *das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren* F *und* $A\,F$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$.

Beweis. Wir bilden den Teilraum $\mathfrak{N}_0 = \overline{\mathfrak{L}_+^0 + \mathfrak{L}_-^0}$. Dann gilt $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{P}_0$, $F\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$ und $A\,F\,\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_0$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$. Gemäss Lemma 2.2 bildet der Faktorraum $\mathfrak{N}_0^\perp / \mathfrak{N}_0$, aufgefasst als Teilraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$, wieder einen J-Raum für dieselben Skalarprodukte wie der Ausgangsraum $\mathfrak{H}$. Ein J-selbstadjungierter Operator T in $\mathfrak{H}$, der $\mathfrak{N}_0$ und damit auch $\mathfrak{N}_0^\perp$ invariant lässt, erzeugt dann durch die Gleichung $T'\,x' = (T\,x)'$ einen ebenfalls J-selbstadjungierten Operator T' in $\mathfrak{H}'$, wenn x' das $x \in \mathfrak{N}_0^\perp$ zugeordnete Element aus $\mathfrak{H}'$ bezeichnet. Ist L_+ die J-selbstadjungierte Projektion auf $\mathfrak{L}_+^1$, dann ist L_+' eine J-selbstadjungierte Projektion in $\mathfrak{H}'$. Ihr Wertebereich ist das Bild $\mathfrak{L}_+'$ von $\mathfrak{L}_+^1 \subset \mathfrak{N}_0^\perp$ bezüglich des kanonischen Homomorphismus von $\mathfrak{N}_0^\perp$ auf $\mathfrak{H}'$, also ist $\mathfrak{L}_+'$ wieder J-projektionsvollständig in $\mathfrak{H}'$, und dasselbe gilt auch für $\mathfrak{L}_-'$. Das J-orthogonale Komplement $\mathfrak{H}''$ von $\mathfrak{L}_+' + \mathfrak{L}_-'$ in $\mathfrak{H}'$ bildet wieder einen J-Raum für das indefinite Skalarprodukt $[x'' , y'']$ $(x'' , y'' \in \mathfrak{H}'')$ und ist invariant bezüglich der Operatoren F' und $(A\,F)'$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$. Die Einschränkungen F'' und $(A\,F)''$ der Operatoren F' und $(A\,F)'$ auf $\mathfrak{H}''$ genügen denselben Voraussetzungen wie F und $A\,F$, also existiert gemäss Satz 3.1 ein maximales duales Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\prime\prime\max} , \mathfrak{L}_-^{\prime\prime\max}\}$, das invariant ist bezüglich aller F'' und $(A\,F)''$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$. Die Teilräume

$$\mathfrak{L}_+^{\max} = \mathfrak{L}_+^{\prime\prime\max} + \mathfrak{L}_+' + \mathfrak{N}_0 , \qquad \mathfrak{L}_-^{\max} = \mathfrak{L}_-^{\prime\prime\max} + \mathfrak{L}_-' + \mathfrak{N}_0$$

bilden dann ein für alle F und $A\,F$ $(A \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{F})$ invariantes maximales duales Paar.

Folgerung 3.1, Satz 3.2 und Satz 3.3 lassen sich entsprechend verschärfen. Wir verzichten jedoch auf die Formulierung dieser Aussagen und vermerken nur die

Folgerung 4.1. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren in einem J-Raum vom Typ* $\Pi_\varkappa$. *Dann lässt sich jedes duale Paar* $\{\mathfrak{L}_+ , \mathfrak{L}_-\}$, *das invariant ist für alle Operatoren aus* $\mathfrak{A}$, *erweitern zu einem maximalen dualen Paar, das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren aus* $\mathfrak{A}$.

In einem J-Raum vom Typ $\Pi_\varkappa$ lassen sich nämlich $\mathfrak{L}_+$ und $\mathfrak{L}_-$ stets in der Form (19) darstellen, denn $\mathfrak{P}_0$ enthält nur Teilräume einer Dimension kleiner oder gleich $\varkappa$. Dabei ist $\mathfrak{L}_+^1$ (bzw. $\mathfrak{L}_-^1$) als J-nichtnegativer (bzw. J-nichtpositiver) Teilraum auch J-projektionsvollständig ([1], Satz 6.5).

Schliesslich zeigen wir, dass die Voraussetzung (19) über die Zerlegbarkeit der Teilräume $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ entbehrt werden kann, wenn $\mathfrak{A}$ nur aus J-nichtnegativen Operatoren besteht.

Satz 4.2. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Familie J-nichtnegativer Operatoren, $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ ein duales Paar von Teilräumen aus $\mathfrak{H}$, das invariant ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{A}$. Dann lässt sich $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ erweitern zu einem maximalen dualen Paar, das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{A}$.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathfrak{N}_0 = \overline{(\mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{P}_0) + (\mathfrak{L}_- \cap \mathfrak{P}_0)}$$

und betrachten wieder den Faktorraum $\mathfrak{N}_0^\perp / \mathfrak{N}_0$ als Teilraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{N}_0^\perp$, $\mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{N}_0^\perp$, und das Bild $\mathfrak{L}_+'$ (bzw. $\mathfrak{L}_-'$) des Teilraumes $\mathfrak{L}_+$ (bzw. $\mathfrak{L}_-$) enthält keine J-nullartigen Elemente $x' \neq 0$. Die Voraussetzungen über die Familie $\mathfrak{A}$ und die Teilräume $\mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{L}_-$ bleiben für die von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}'$ induzierte Familie $\mathfrak{A}'$ und die Teilräume $\mathfrak{L}_+'$, $\mathfrak{L}_-'$ erhalten. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass bereits $\mathfrak{L}_+$ (bzw. $\mathfrak{L}_-$) J-positiv (bzw. J-negativ) ist.

Es sei

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t^{(A)} + N^{(A)}$$

wieder die Darstellung (3) des Operators $A \in \mathfrak{A}$. Wie im Beweis von Satz 3.1 bilden wir die Teilräume $\mathfrak{S}_+^{(A)}$, $\mathfrak{S}_-^{(A)}$ gemäss (13) und

$$\mathfrak{S}_\pm = \text{a. l. H.} \{ \mathfrak{S}_\pm^{(A)} \mid A \in \mathfrak{A} \},$$
$$\mathfrak{N} = \text{a. l. H.} \{ \mathfrak{N}(N^{(A)}) \mid A \in \mathfrak{A} \}.$$

Dann bestehen die Beziehungen (14), (15) und

$$A\,(\mathfrak{S}_-^{(A)})^\perp \subset \mathfrak{S}_+ + \mathfrak{N}.$$

Wir überlegen uns, dass für $t < 0$, $s > 0$ und $A, A' \in \mathfrak{A}$

$$N^{(A)} E_t^{(A')} = O, \quad N^{(A)} (I - E_s^{(A')}) = O, \quad N^{(A)} N^{(A')} = O \tag{20}$$

gilt; daraus folgt unmittelbar

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}_0 \,, \quad \mathfrak{N} \perp \mathfrak{S}_+ \,, \quad \mathfrak{N} \perp \mathfrak{S}_- \,. \tag{21}$$

Zum Beweis von (20) beachten wir, dass aus der Vertauschbarkeit von A mit $N^{(A')}$ und aus $(N^{(A')})^2 = O$

$$|[A\, N^{(A')}\, x\,, y]|^2 \leqq [A\, N^{(A')}\, x\,, N^{(A')}\, x]\,[A\, y\,, y] = 0$$

$(x\,, y \in \mathfrak{H})$, also $A\, N^{(A')} = O$ und somit für $z \in \varrho(A)\,,\ z \neq 0\,,$

$$\frac{1}{z} N^{(A')} = -N^{(A')}\,(A - z\,I)^{-1}$$

folgt $(A\,, A' \in \mathfrak{A})$. Daraus ergeben sich auf Grund von (4) die ersten beiden Gleichungen (20). Dann ist aber auch

$$N^{(A)}\, N^{(A')} = \left(A - \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t^{(A)}\right) N^{(A')} = O\,.$$

Da $E_t^{(A)}\, \mathfrak{L}_+$ in $\mathfrak{L}_+$ enthalten und andererseits $\mathfrak{R}(E_t^{(A)})$ J-negativ ist, gilt weiter $E_t^{(A)}\, \mathfrak{L}_+ = \{0\}$ und entsprechend $(I - E_s^{(A)})\, \mathfrak{L}_- = \{0\}$ $(t < 0\,,\ s > 0\,;\ A \in \mathfrak{A})$, also ist

$$\mathfrak{L}_+ \perp \mathfrak{S}_- \,, \quad \mathfrak{L}_- \perp \mathfrak{S}_+ \,. \tag{22}$$

Da $\mathfrak{L}_+$ nach Voraussetzung J-positiv und invariant bezüglich $N^{(A)}$, andererseits aber $\mathfrak{R}(N^{(A)}) \subset \mathfrak{P}_0$ ist, ergibt sich ebenso $N_s^{(A)}\, \mathfrak{L}_+ = \{0\}$ und entsprechend $N^{(A)}\, \mathfrak{L}_- = \{0\}$, also gilt

$$N \perp \mathfrak{L}_+ \,, \quad \mathfrak{N} \perp \mathfrak{L}_- \,. \tag{23}$$

Wir setzen jetzt

$$\hat{\mathfrak{L}}_+ = \mathfrak{L}_+ + \mathfrak{S}_+ + \mathfrak{N}\,, \quad \hat{\mathfrak{L}}_- = \mathfrak{L}_- + \mathfrak{S}_- + \mathfrak{N}\,.$$

Dann sind auf Grund der Beziehungen (15), (21), (22) und (23) $\hat{\mathfrak{L}}_+$ und $\hat{\mathfrak{L}}_-$ zueinander J-orthogonal. Ihre Abschliessungen $\overline{\hat{\mathfrak{L}}}_+\,, \overline{\hat{\mathfrak{L}}}_-$ bilden olglich ein duales Paar, wenn wir noch zeigen, dass die Inklusionen

$$\text{l. H.}\,\{\mathfrak{R}(I - E_s^{(A)}) \mid s > 0\,,\ A \in \mathfrak{A}\} + \mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{P}_+\,,$$
$$\text{l. H.}\,\{\mathfrak{R}(E_t^{(A)}) \mid t < 0\,,\ A \in \mathfrak{A}\} + \mathfrak{L}_- \subset \mathfrak{P}_-$$

bestehen. Die erste folgt aber z. B. aus der Tatsache, dass für $y \in \mathfrak{L}_+$ und paarweise orthogonale J-selbstadjungierte Projektionen $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$, deren Wertebereiche alle zu $\mathfrak{P}_+$ gehören und die $\mathfrak{L}_+$ invariant lassen, gilt $(x_1\,, x_2\,, \dots\,, x_n \in \mathfrak{H}\,;\ y \in \mathfrak{L}_+)$:

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)}\, x_\nu + y\;,\; \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)}\, x_\nu + y\right]$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} (x_\nu + y) \ , \ \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} (x_\nu + y) \right]$$

$$+ \left[\left(I - \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \right) y \ , \ \left(I - \sum_{\nu=1}^{n} E^{(\nu)} \right) y \right] \geqq 0 \, .$$

Erweitern wir schliesslich $\{\bar{\hat{\mathfrak{L}}}_+ , \bar{\hat{\mathfrak{L}}}_-\}$ zu einem maximalen dualen Paar $\{\mathfrak{L}_+^{\max} , \mathfrak{L}_-^{\max}\}$, so ergibt sich für alle $A \in \mathfrak{A}$

$$A \, \mathfrak{L}_+^{\max} \subset A \, (\hat{\mathfrak{L}}_-)^\perp \subset A \, (\mathfrak{S}_-^{(A)})^\perp \subset \mathfrak{S}_+ + \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}_+^{\max}$$

und entsprechend $A \, \mathfrak{L}_-^{\max} \subset \mathfrak{L}_-^{\max}$, womit der Satz bewiesen ist.

Wir vermerken noch, dass offensichtlich das Spektrum der Einschränkung von A auf $\mathfrak{L}_+^{\max}$ (bzw. $\mathfrak{L}_-^{\max}$) ganz auf der nichtnegativen (bzw. nichtpositiven) Halbachse liegt.

Folgerung 4.2. *Es seien $\mathfrak{A}$ eine kommutative Familie J-selbstadjungierter Operatoren, deren jeder einer der Bedingungen (P'_+), (P'_-) genügt, und $\{\mathfrak{L}_+ , \mathfrak{L}_-\}$ ein duales Paar von Teilräumen, das invariant ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{A}$. Dann lässt sich $\{\mathfrak{L}_+ , \mathfrak{L}_-\}$ erweitern zu einem maximalen dualen Paar, das ebenfalls invariant ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{A}$.*

Aus dieser Folgerung oder auch aus Folgerung 3.2 ergibt sich insbesondere, dass ein Operator A, welcher der Bedingung (P) genügt, ein invariantes maximales duales Paar von Teilräumen besitzt. An anderer Stelle [11] zeigen wir, dass dieses i. allg. nicht eindeutig bestimmt ist.

Technische Universität Dresden
DDR

Literatur

[1] GINZBURG, JU. P., und I. S. IOHVIDOV [Ю. П. Гинзбург und И. С. Иохвидов]: Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой. - Успехи Мат. Наук (Нов. Сер.) 17:4 (106), 1962, S. 3–56.

[1′] —»— The geometry of infinite-dimensional spaces with a bilinear metric. - Russian Math. Surveys 17:4, 1962 (1963), S. 1–51. [Englische Übersetzung von [1].]

[2] IOHVIDOV, I. S., und M. G. KREĬN [И. С. Иохвидов und М. Г. Крейн]: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II. - Труды Москов. Мат. Общ. 8, 1959, S. 413–496.

[2′] —»— Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. II. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34, 1963, S. 283–373. [Englische Übersetzung von [2].]

[3] KREĬN, M. G. [М. Г. Крейн]: Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 154, 1964, S. 1023–1026.

[3′] —»— A new application of the fixed-point principle in the theory of operators on a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 5, 1964, S. 224–228. [Englische Übersetzung von [3].]

[4] KREĬN, M. G., und H. LANGER [М. Г. Крейн und Г. К. Лангер]: О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 152, 1963, S. 39–42.

[4′] —»— The spectral function of a selfadjoint operator in a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 4, 1963, S. 1236–1239. [Englische Übersetzung von [4].]

[5] KREĬN, M. G., und JU. L. SMUL'JAN [М. Г. Крейн und Ю. Л. Шмульян]: J-полярное представление плюс-операторов. - Мат. Исслед. 1:2. 1966, S. 172–210.

[6] KÜHNE, R.: Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren. - Math. Ann. 154, 1964, S. 56–69.

[7] LANGER, H.: Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren. - Math. Ann. 146, 1962, S. 60–85.

[8] —»— Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin. - Math. Ann. 152, 1963, S. 434–436.

[9] —»— Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$. - Habilitationsschrift, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden, Dresden, 1965.

[10] —»— Об инвариантных подпространствах линейных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 169, 1966, S. 12–15.

[10′] LANGER, H.: Invariant subspaces of linear operators on a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 7, 1966, S. 849—852. [Englische Übersetzung von [10].]

[11] —»— О максимальных дуальных парах инвариантных подпространств J-самосопряженных операторов. - Мат. Заметки 7, 1970 S. 443—447.

[12] NAĬMARK, M. A. [M. A. НАЙМАРК]: On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric. - Acta Sci. Math. (Szeged) 24, 1963, S. 177—189.

[13] PESONEN, E.: Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 227, 1956.

[14] PHILLIPS, R. S.: The extension of dual subspaces invariant under an algebra. - Proceedings of the International symposium on linear spaces, held at the Hebrew University of Jerusalem, July 5—12, 1960. The Israel Academy of Sciences and Humanities (Jerusalem Academic Press / Pergamon Press), Jerusalem, 1961, S. 366—398.

[15] PONTRJAGIN, L. S. [Л. С. Понтрягин]: Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Summary: Hermitian operators in spaces with indefinite metric. - Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат. 8, 1944, S. 243—280.

Gedruckt März 1971