ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

553

EINIGE EXTREMALPROBLEME FÜR n-DIMENSIONALE QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

VON

OSSI TAARI

HELSINKI 1973
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1973.553

ISBN 951—41—0128—6

Am 14 Mai 1973 vorgelegt von JUSSI VÄISÄLÄ

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1973

Einleitung

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zwei von Strebel gelöste Extremalprobleme ebener quasikonformer Abbildungen im n-dimensionalen Fall zu behandeln. Das erste von ihnen ist folgendes [4]: Ist G ein Gebiet der $x+iy$-Ebene von endlichem Flächeninhalt und $f_0, f_0(x+iy) = K_0 x + iy$, $K_0 \geqq 1$, eine Streckung von G, so hat jede andere quasikonforme Abbildung von G auf $f_0(G)$, die auf dem Rande von G mit f_0 übereinstimmt, grössere maximale Dilatation als K_0. Im ersten Paragraphen werden wir den entsprechenden Satz im n-dimensionalen Fall beweisen; der betreffende Beweis ist eine direkte n-Version des Strebelschen Beweises.

Unser Hauptproblem ist die Verallgemeinerung des zweiten obengenannten Extremalsatzes von Strebel [3]. Darin untersuchte er diejenige Familie quasikonformer Selbstabbildungen $w = u + iv : S \to S$ eines Parallelstreifens $S = \{x + iy \mid |y| < 1\}$, die die Randbedingung $u = K_0 x$ für $y = \pm 1$, $K_0 \geq 1$, erfüllt, und bewies folgendes Resultat: Ist w eine K-quasikonforme Abbildung obiger Art, so ist $K \geqq K_0$, wobei die Gleichheit nur im Fall der affinen Abbildung $u = K_0 x$, $v = y$ gilt. In den nachstehenden Paragraphen werden wir das entsprechende Problem für die räumlichen Zylinder untersuchen.

Es sei hierbei Z ein Zylinder $G \times R^1 \subset R^n$, worin G ein Gebiet in R^{n-1} mit $m_{n-1}(G) < \infty$ ist. Wir betrachten einen Homöomorphismus $f : \overline{Z} \to \overline{Z}$, dessen Einschränkung auf Z quasikonform ist, und nehmen an, dass f auf ∂Z die Randbedingung

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, Kx_n)$$

erfüllt, in der $K \geqq 1$ eine endliche Konstante ist[1]. Es wird gezeigt, dass hierbei die äussere und innere Dilatation von f die Ungleichung $K_O(f) \geqq K^{n-1}$ bzw. $K_I(f) \geqq K$ befriedigt. Ist $K_O(f) = K^{n-1}$, so gehen die zur x_n-Achse parallelen Geraden auf ebensolche Geraden über, und das Bild des Querschnittes

$$(2) \qquad G(t) = \{x + te_n \mid x \in G\}$$

[1] Für die Theorie der quasikonformen Abbildungen in R^n verweisen wir auf die Monographie von Väisälä [6].

ist für jedes $t \in R^1$ der Querschnitt $G(Kt)$. Ferner induziert f einen Homöomorphismus $h : G(0) \to G(0)$, dessen Volumenableitung fast überall in $G(0)$ gleich Eins ist. Durch ein Beispiel wird gezeigt, dass f hierbei doch keine Affine zu sein braucht. Nimmt man $K_I(f) = K$ an, so ist f die durch (1) definierte Affine in Z. Die Beweismethoden für diese Behauptungen sind von [3] abweichend.

Zum Schluss der Einleitung möchte der Verfasser Herrn Jussi Väisälä für die nützlichen Ratschläge während der Arbeit danken. Insbesondere ist die Idee des Beispiels auf Seite 17 von ihm vorgeschlagen worden.

1. Das Extremalproblem für Gebiete von endlichem Mass

Wie in der Einleitung schon betont, ist der Beweis des folgenden Satzes eine direkte Version des ebenen Beweises von Strebel [4].

Satz 1. *Es sei $G \subset R^n$ ein Gebiet, $m_n(G) < \infty$, und f_0 die durch (1) definierte Streckung von $\overline{G}$. Ist $f : \overline{G} \to \overline{f_0(G)}$ ein Homöomorphismus, dessen Einschränkung auf G quasikonform ist und der auf dem Rande von G mit f_0 übereinstimmt, so gilt $K_O(f) \geqq K^{n-1}$ und $K_I(f) \geqq K$. Im Fall der Gleichheit $K_O(f) = K^{n-1}$ oder $K_I(f) = K$ ist f die durch (1) erklärte Affine.*

Beweis. Man bezeichne $I(y) = G \cap P_n^{-1}(y)$, worin P_n die Projektion $P_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ bedeutet und $y \in P_u(G)$. $I(y)$ besteht aus einer höchstens abzählbaren Menge von getrennten, offenen Strecken, und wegen der Bedingung $m_n(G) < \infty$ ist die Gesamtlänge $l(y)$ von $I(y)$ endlich für fast jedes $y \in P_n(G)$; andererseits ist $l(y) > 0$. Für fast jedes $y \in P_n(G)$ ist f absolut stetig auf $I(y)$, also gilt hierbei

$$K\, l(y) \leqq L(y) = \int_{I(y)} |D_n f|\, dm_1 , \tag{3}$$

wobei $L(y)$ die Länge von $f(I(y))$ ist. Hieraus folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und ferner nach Division durch $l(y)^{n-1}$ und Integration über $P_n(G)$

$$K^n m_n(G) \leqq \int_{P_n(G)} \frac{L(y)^n}{l(y)^{n-1}}\, dm_{n-1}(y) \leqq \int_G |D_n f(x)|^n\, dm_n(x)$$

$$\leqq K_O(f) \int_G J(x, f)\, dm_n(x) = K K_O(f) m_n(G) .$$

Daher ist zunächst $K_O(f) \geqq K^{n-1}$.

Es sei $K_O(f) = K^{n-1}$. Dann gilt die Gleichheit in der letzten Abschätzungkette und also für fast jedes $y \in P_n(G)$ in der vorangehenden Ungleichung (3). Somit ist $L(y) = Kl(y)$ und also $f(I(y))$ geradlinig für fast alle $y \in P_n(G)$. Zufolge des Gleichheitszeichens in der Hölderschen Ungleichung ist $|D_n f(y + te_n)|$ und also auch $|D_n f_n(y + te_n)|$ konstant für fast alle t-Werte; daraus folgt $f_n(x) = Kx_n$ fast überall in G. Nach der Stetigkeit von f gilt dies für jedes $x \in G$. Die Behauptungen für $K_I(f)$ folgen aus der stets bestehenden Beziehung $K_I(f)^{n-1} \geqq K_O(f)$.

2. Ein Verzerrungssatz für Zylinder

Wir gehen jetzt zu unserem Hauptproblem über und betrachten vorbereitend eine Verzerrungseigenschaft für die zweite Abbildungsklasse.

Satz 2. *Es sei f eine die Randbedingung (1) erfüllende quasikonforme Selbstabbildung von Z. Dann gibt es eine nur von K, $K_O(f)$, n und $m_{n-1}(G)$ abhängende endliche Konstante d derart, dass die Zahl*

$$V(t) = \max_{x \in G(t)} |f_n(x) - Kt|$$

für jedes $t \in R^1$ höchstens gleich d ist.

Für den Beweis dieses Satzes betrachten wir zuerst die folgende Modulaufgabe in R^{n-1}.

Lemma 1. *Es sei G ein Gebiet in R^{n-1}, $m_{n-1}(G) < \infty$, und E eine abgeschlossene Teilmenge von G. Dann gilt*

$$M_n^G(\triangle(E, \partial G; G \setminus E)) \geqq (n-1)^{1-n}(\omega_{n-2}^n/(n-1)m_{n-1}(G))^{1/(n-1)}.$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist eine direkte Verallgemeinerung des Beweises von Theorem 3.4, Väisälä [5], vgl. auch Martio — Rickman — Väisälä [1], Beweis von Lemma 5.9.

Beweis von Satz 2. Man kann $t = 0$ annehmen. Dann ist also

$$V(0) = \max\{|f_n(x)| \mid x \in G(0)\}.$$

Ferner sei angenommen, dass $V(0)$ in einem solchen Punkt $x_0 \in G(0)$ erreicht wird, in dem $f_n(x_0) > 0$ ist. Wir behaupten, dass es eine Konstante $d > 0$ gibt, für die $V(0) \leqq d$ ist.

Man wähle $h > 0$ derart, dass $Kh < V(0)$ ist. Es sei $J' = \{f(x_0) + te_n \mid f_n(x_0) \leqq t \leqq t_0\}$, $f(x_0) + t_0 e_n \in f(G(h))$, diejenige mit der x_n-Achse parallele Strecke, die den Punkt $f(x_0)$ mit $f(G(h))$ verbindet und ausser ihren Endpunkten in der Bildmenge des Zylinders

$$Z(0\,,h) = G \times (0\,,h)$$

liegt. Das Urbild von J', das $G(0)$ mit $G(h)$ verbindet, bezeichne man mit J. Wir betrachten diejenige Bogenfamilie Γ, die J mit der Zylinderfläche $\partial G \times (0\,,h)$ in $Z(0\,,h)$ verbindet.

Um den Modul der Bildschar $f(\Gamma)$ nach oben abzuschätzen, wählen wir

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1/(V(0) - Kh) & \text{für } x \in Z(Kh\,, V(0)) \\ 0 & \text{anderswo.} \end{cases}$$

Dann ist $\int_{\gamma'} \varrho\, ds \geqq 1$ für jedes $\gamma' \in f(\Gamma)$, und der Modul von $f(\Gamma)$ erfüllt also die Ungleichung

$$M(f(\Gamma)) \leqq \int\limits_{Z(Kh,\, V(0))} \varrho^n\, dm = m_{n-1}(G)/(V(0) - Kh)^{n-1}\,.$$

Wir brauchen noch eine untere Schranke für $M(\Gamma)$. Zu diesem Zweck betrachten wir für beliebiges t, $0 \leqq t \leqq h$, diejenige Familie $\Gamma(t)$, die $J \cap G(t)$ und den Rand von $G(t)$ in $G(t)$ verbindet. Für jedes $\varrho \in F(\Gamma)$ ist $\varrho \mid G(t) \in F(\Gamma(t))$, und es gilt also nach Lemma 1

$$\int\limits_{R^n} \varrho^n\, dm_n \geqq \int\limits_0^h dt \int\limits_{G(t)} \varrho^n\, dm_{n-1} \geqq \int\limits_0^h M_n^{G(t)}(\Gamma(t))\, dt \geqq ch\,,$$

worin

$$c = (n-1)^{1-n}\,(\omega_{n-2}^n/(n-1)m_{n-1}(G))^{1/(n-1)}$$

ist. Hieraus ergibt sich $M(\Gamma) \geqq ch$. Aus $M(\Gamma) \leqq K_O(f) M(f(\Gamma))$ folgt nun die Ungleichung

$$(V(0) - Kh)^{n-1} h \leqq K_O(f) m_{n-1}(G)/c\,. \tag{3}$$

Jeder h-Wert, $0 < h < V(0)/K$, ergibt eine obere Schranke für $V(0)$. Durch Substitution $h = V(0)/nK$, wobei die linke Seite von (3) maximal ist, erhält man z. B. für $V(0)$ die Abschätzung

$$(V(0))^n \leqq K K_O(f) n^n (n-1)^{1-n} m_{n-1}(G)/c\,,$$

und der Satz ist bewiesen.

3. Lösung des Extremalproblems für Zylinder

Nach den obigen Vorbereitungen gehen wir zu unserem Zylinderproblem über. Die zur x_n-Achse parallelen Geraden und Strecken seien hierbei kurz x_n-Geraden bzw. x_n-Strecken genannt.

Satz 3. *Ist f eine die Randbedingung (1) erfüllende quasikonforme Selbstabbildung von Z, so befriedigen ihre äussere und innere Dilatation die Beziehungen*

$$K_O(f) \geqq K^{n-1}\,, \quad K_I(f) \geqq K\,.$$

Beweis. Durch eine einfache Modulbetrachtung zeigen wir zuerst, dass $K_O(f) \geqq K^{n-1}$ ist. Der Modul $M(\Gamma)$ der Bogenschar $\Gamma = \triangle(G(0)\,, G(h)\,; Z(0\,, h))\,, h > 2d$, ist

$$\frac{m_n(Z(0\,,\,h))}{h^n} = \frac{m_{n-1}(G)}{h^{n-1}}\,,$$

und für den Modul ihrer Bildschar gilt nach der Verallgemeinerung der Rengelschen Ungleichung

$$M(f\Gamma) \leqq \frac{m_{n-1}(G)(Kh + 2d)}{(Kh - 2d)^n}\,,$$

in der d die in Satz 2 vorkommende Konstante ist. Aus $M(\Gamma) \leqq K_O(f)M(f\Gamma)$ ergibt sich durch $h \to \infty$

$$K_O(f) \geqq K^{n-1}\,.$$

Die Behauptung $K_I(f) \geqq K$ folgt aus der Beziehung $K_O(f) \leqq K_I(f)^{n-1}$.

Satz 4. *Ist $K_O(f) = K^{n-1}$, so gehen die x_n-Geraden auf ebensolche Geraden über, und das Bild des Querschnittes*

$$G(t) = \{x + te_n \mid x \in G(0)\}$$

ist für jedes $t \in R^1$ der Querschnitt $G(Kt)$. Ferner ist die Querschnittableitung, d.i. die Jacobian $J(x\,, h)$ des von f induzierten Homöomorphismus $h = f \mid G(0)$, für fast jedes $x \in G(0)$ gleich Eins.

Für den Beweis des Satzes schicken wir die folgenden Hilfssätze voraus. Die Gültigkeit der Randbedingung (1) und der Gleichung $K_O(f) = K^{n-1}$ wird dann angenommen. Dabei bezeichnen wir

$$Z(a\,, b) = G(0) \times (a\,, b)\,.$$

Lemma 2. *Für jede quasikonforme Abbildung $f : Z \to Z$, die die Randbedingung (1) und die Bedingung $K_O(f) = K^{n-1}$ erfüllt, gilt*

$$0 \leqq \int\limits_Z (L_f^n - |D_n f_n|^n)dm \leqq 2d(1 + n)K^{n-1}m_{n-1}(G)\,,$$

worin L_f die maximale Ableitung von f ist.

Beweis. Es sei $j > d/K$. Auf fast allen x_n-Geraden $s(y) = \{y + te_n \mid t \in R^1\}$, $y \in G(0)$, ist f und also auch die n:te Koordinatenfunktion f_n lokal absolut stetig und dazu f differenzierbar in fast jedem Punkt von $s(y)$. Hieraus folgt für die betreffenden Punkte $y \in G(0)$ die Abschätzung

$$2Kj - 2d \leqq \int_{-j}^{j} D_n f_n(y + te_n) dt \,.$$

Ferner ergibt sich mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$(2Kj - 2d)^n \leqq \left(\int_{-j}^{j} D_n f_n(y + te_n) dt \right)^n \leqq (2j)^{n-1} \int_{-j}^{j} |D_n f_n(y + te_n)|^n \, dt$$
$$\leqq (2j)^{n-1} \int_{-j}^{j} L_f(y + te_n)^n \, dt \,.$$

Da $L_f(x)^n \leqq K_O(f) J(x, f)$ fast überall in $Z(-j, j)$ ist, erhält man durch Integration über $G(0)$

$$(2Kj - 2d)^n m_{n-1}(G) \leqq (2j)^{n-1} \int_{Z(-j, j)} |D_n f_n(x)|^n \, dm(x)$$
$$\leqq (2j)^{n-1} \int_{Z(-j, j)} L_f(x)^n dm(x) \leqq (2jK)^{n-1} \int_{Z(-j, j)} J(x, f) dm(x)$$
$$\leqq (2jK)^{n-1} (2Kj + 2d) m_{n-1}(G)$$

und hieraus weiter

$$0 \leqq \int_{Z(-j, j)} (L_f(x)^n - |D_n f_n(x)|^n) dm(x)$$
$$\leqq (2dK^{n-1}(1 + n) + \varepsilon_j) m_{n-1}(G) \,,$$

wobei $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$ ist. Aus $j \to \infty$ folgt nun wegen $L_f(x)^n - |D_n f_n(x)|^n \geqq 0$ die Behauptung.

Wird f auf R^n derart erweitert, dass $f \mid R^n \setminus \overline{Z}$ die Affine (1) ist, so ist f nach Rickman [2], Theorem 1, quasikonform in R^n. Wir konstruieren eine quasikonforme Abbildungsfolge g^i von R^n durch die Gleichheit

$$g^i(x) = f(x + ie_n) - Kie_n \,, \; i = 1, 2, \ldots \,.$$

Nach Väisälä [6], Theorem 20.5, hat diese Folge eine in R^n k-gleichmässig[1]

[1] d.i. gleichmässig in allen kompakten Teilen von R^n.

konvergente Teilfolge, deren Limes g keine Konstante ist und die Bedingung $g \mid \partial Z = f_0 \mid \partial Z$ erfüllt. Wir bezeichnen diese Teilfolge fortan mit g^i, $i \in J$, wobei J eine Teilfolge von N ist. Nach [6], Corollary 21.3, Theorem 37.2, und den obigen Sätzen 2 und 3 ist g quasikonform mit $K_0(g \mid Z) = K^{n-1}$. $g \mid Z$ besitzt wieder die Randwerte (1), und der Satz 2 ist also auch für g gültig. Wegen gewisser Konvergenzeigenschaften regularisiert dieser Grenzübergang die ursprüngliche Abbildung f; das Verhalten von f im Unendlichen wird ins Endliche hervorgezogen.

Die nachstehenden Hilfssätze enthalten hauptsächlich Behauptungen über die Folge g^i und ihre Grenzabbildung g, mit deren Hilfe in Lemma 8 geschlossen wird, dass $g_n(x) = \lim_{i\to\infty} g^i_n(x) = \lim_{i\to\infty} (f_n(x + ie_n) - Ki) = 0$ für jedes $x \in G(0)$ gilt, wobei i also die Folge J durchläuft.

Lemma 3. *Gelten die Voraussetzungen von Lemma 2, so ist*

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\in J}} \int_{Z(a,\,b)} (L_i(x) - D_n g^i_n(x))^n dm(x) = 0$$

für alle $-\infty < a < b < \infty$, *wobei* $L_i = L_{g^i}$ *und* g^i_n *die* n : *te Koordinatenfunktion von* g^i *ist.*

Beweis. Man bezeichne mit A und B diejenigen Teilmengen von Z, in denen $D_n f_n(x) > 0$ bzw. $D_n f_n(x) \leqq 0$ ist. In A gilt die Abschätzung

$$(L_f(x) - D_n f_n(x))^n \leqq L_f(x)^n - (D_n f_n(x))^n ,$$

da $0 < D_n f_n(x) \leqq L_f(x)$ ist. Daher ist

$$\int_A (L_f(x) - D_n f_n(x))^n dm(x) \leqq \int_A (L_f(x)^n - (D_n f_n(x))^n) dm(x) , \tag{4}$$

was nach Lemma 2 beschränkt ist.

Für das entsprechende Resultat über die Menge B zeigen wir, dass

$$\int_B (L_f(x) - D_n f_n(x))^n dm(x) \leqq 2^{n+1}(1 + n) d K^{n-1} m_{n-1}(G) . \tag{5}$$

Auf fast allen x_n-Geraden gilt

$$\begin{aligned} 2Kj - 2d &\leqq \int_{I_j} D_n f_n(y + te_n) dt \leqq \int_{I_j \cap A} D_n f_n(y + te_n) dt \\ &\leqq \int_{I_j \cap A} L_f(y + te_n) dt , \end{aligned}$$

worin I_j die Strecke $(-j\,,j)$ bedeutet. Durch die Höldersche Ungleichung und Integration über $G(0)$ erhält man

$$(6)\qquad (2Kj - 2d)^n m_{n-1}(G) \leqq (2j)^{n-1} \int\limits_{Z(-j,j)\cap A} L_f(x)^n dm(x)\,.$$

Ferner ist, wir im Beweis von Lemma 2,

$$(7)\qquad \int\limits_{Z(-j,j)} L_f(x)^n dm(x) \leqq K^{n-1}(2Kj + 2d) m_{n-1}(G)\,.$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\int\limits_{Z(-j,j)\cap B} L_f(x)^n dm(x) \leqq (2(1+n)dK^{n-1} + \varepsilon_j) m_{n-1}(G)\,,$$

wobei $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$, und daher, da j beliebig ist,

$$\int\limits_{B} L_f(x)^n dm(x) \leqq 2(1+n)dK^{n-1} m_{n-1}(G)\,.$$

Wegen $|D_n f_n(x)| \leqq L_f(x)$ ist (5) also gültig. Nach (4), (5) und Lemma 2 ist $(L_f - D_n f_n)^n$ integrierbar in Z .

Wir wählen zwei Zahlen a und b , $a < b$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es i_0 derart, dass

$$\int\limits_{Z(i+a,\,i+b)} (L_f(x) - D_n f_n(x))^n dm(x) < \varepsilon$$

fur jedes $i > i_0$ ist. Wegen $L_i(x) - D_n g_n^i(x) = L_f(x + ie_n) - D_n f_n(x + ie_n)$ gilt hierbei also

$$\int\limits_{Z(a,b)} (L_i(x) - D_n g_n^i(x))^n dm(x) < \varepsilon\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Lemma 4. *Die x_n-Geraden gehen bei der Abbildung g auf die x_n-Geraden über.*

Beweis. Es seien $a\,,\,b \in R^1$, $a < b$, beliebig. Nach der ASG-Eigenschaft von g^i gibt es eine Menge $E \subset G(0)$, $m_{n-1}(E) = m_{n-1}(G)$, derart, dass g^i zu jedem $i \in J$ lokal absolut stetig auf jeder Geraden $\{y + te_n \mid t \in R^1\}$, $y \in E$, ist. Das Integral

$$\int_a^b (L_i(y\,;t) - D_n g_n^i(y\,;t))\,dt$$

ist für jedes $y \in E$ definiert und

$$\int_a^b D_n g_n^i(y + te_n)dt = g_n^i(y + be_n) - g_n^i(y + ae_n)\,.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_{G(0)} \left(\liminf_{\substack{i \to \infty \\ i \in J}} \int_a^b (L_i(y\,;t) - D_n g_n^i(y\,;t))dt \right) dm_{n-1}(y)$$

$$\leqq \liminf_{\substack{i \to \infty \\ i \in J}} \int_{G(0)} \left(\int_a^b (L_i(y\,;t) - D_n g_n^i(y\,;t))dt \right) dm_{n-1}(y)\,,$$

wo die rechte Seite gemäss der Hölderschen Ungleichung und Lemma 3 verschwindet. Es gibt also eine Menge $E_1 \subset E$, $m_{n-1}(E_1) = m_{n-1}(G)$, wo

$$\liminf_{\substack{i \to \infty \\ i \in J}} \int_a^b (L_i(y\,;t) - D_n g_n^i(y\,;t))dt = 0\,.$$

Es sei $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ ein beliebiger Punkt von E_1. Dann gibt es eine Teilfolge (i_k) von J, für die

(8) $$\lim_{k \to \infty} \int_a^b (L_{i_k}(y\,;t) - D_n g_n^{i_k}(y\,;t))dt = 0$$

ist. Da

$$\int_a^b D_n g_n^{i_k}(y + te_n)dt = g_n^{i_k}(y\,;b) - g_n^{i_k}(y\,;a)$$

gegen die Koordinatendifferenz $g_n(y\,;b) - g_n(y\,;a)$ von g konvergiert, folgt aus (8), dass auch die Länge des g^{i_k}-Bildes der Strecke $s(y\,;a\,,b) = \{y + te_n \mid a \leqq t \leqq b\}$ gegen dieselbe Differenz konvergiert. Wegen $g^{i_k} \to g$ sieht man durch eine einfache elementargeometrische Betrachtung, dass $g(s(y\,;a\,,b))$ eine x_n-Strecke ist. Nach der Stetigkeit von g gilt dasselbe auch für jedes $y \in G(0)$. Da a und b beliebig sind, ergibt sich hieraus die Behauptung.

Es sei $B \subset G(0)$ eine Borelsche Menge. Nach Lemma 4 ist das g-Bild des Zylinders $Z(B) = B \times R^1$ wieder ein Zylinder, und die Volumenableitung $\sigma_g(y)$ der Abbildung $h_g = P_n \circ g : G(0) \to G(0)$ ist endlich für fast jedes $y \in G(0)$.

Lemma 5. *Es gilt*

$$\sigma_g(y) = 1$$

fast überall in $G(0)$.

Beweis. Man wähle einen beliebigen Punkt $y \in G(0)$, wo $\sigma_g(y)$ endlich ist. Es sei $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ so klein, dass $m_{n-1}(h_g(B^{n-1}(y, r))) < (\sigma_g(y) + \varepsilon)\, m_{n-1}(B^{n-1}(y, r))$ ist. Für beliebiges $h > 2d/K$ betrachte man die Bogenfamilie $\Gamma = \triangle(B^{n-1}(y, r), B^{n-1}(y + he_n, r); Z(B^{n-1}(y, r); 0, h))$, in der $Z(B^{n-1}(y, r); 0, h)$ den Zylinder $B^{n-1}(y, r) \times (0, h)$ bedeutet. Dann ist.

$$M(\Gamma) = \frac{m_{n-1}(B^{n-1}(y, r))}{h^{n-1}}$$

und

$$M(g\Gamma) < \frac{(\sigma_g(y) + \varepsilon)\, m_{n-1}(B^{n-1}(y, r))}{(Kh - 2d)^{n-1}} .$$

Aus $M(\Gamma) \leqq K^{n-1} M(g\Gamma)$ folgt durch $h \to \infty$

$$\sigma_g(y) + \varepsilon \geqq 1 .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist also $\sigma_g(y) \geqq 1$.

Andererseits kann $\sigma_g(y)$ den Wert Eins in keiner positivmässigen Teilmenge von $G(0)$ überschreiten, da

$$\int\limits_{G(0)} \sigma_g(y) dm_{n-1}(y) \leqq m_{n-1}(G(0))$$

ist. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Später wird bewiesen, dass auch f die x_n-Geraden auf x_n-Geraden abbildet. Wie aus dem obigen Beweis hervorgeht, gilt dann $\sigma_f(y) = 1$ f.ü. in $G(0)$.

Lemma 6. Für fast jedes $x \in Z$ ist

$$L_g(x) \leqq K .$$

Beweis. Es sei $B \subset G(0)$ eine Borelsche Menge, $I = (a, b)$ eine Strecke und $A = B \times I$. g induziert den Homöomorphismus $h : G(0) \to$

$G(0)$, $h(y) = P_n(g(y\,;t))$, dessen Volumenableitung $\sigma_g(y) = 1$ für fast jedes $y \in G(0)$ ist. Da h die Bedingung (N) erfüllt, erhält man nach dem Satz von Fubini

$$\int\limits_A J(x\,, g)\, dm(x) = m(gA) = \int\limits_{hB} dm_{n-1}(v) \int\limits_a^b D_n g_n(h^{-1}(v)\,;t)\, dt$$

$$= \int\limits_B dm_{n-1}(y)\, \sigma_g(y) \int\limits_a^b D_n g_n(y\,;t) dt = \int\limits_A D_n g_n(x)\, dm(x)\,.$$

Daher ist $J(x\,, g) = D_n g_n(x)$ und also $L_g(x)^n \leqq K^{n-1} J(x\,, g) = K^{n-1} D_n g_n(x) \leqq K^{n-1} L_g(x)$ fast überall in Z, woraus die Behauptung folgt.

Um die Abschätzung von Lemma 6 zu benutzen, wiederholen wir das obige Regularisierungsverfahren für die Funktion g, wobei wir uns auf die Folge J beschränken, und erhalten somit eine Abbildungsfolge φ^i : $R^n \to R^n$, $i \in J$,

$$\varphi^i(x) = g(x + ie_n) - Kie_n\,,$$

vgl. auch Fussnote, S. 14. Diese Folge hat eine in R^n k-gleichmässig konvergente Teilfolge, die wir weiter mit $(\varphi^i), i \in J_1\,, J_1 \subset J$, bezeichnen; ihre Grenzabbildung φ ist quasikonform mit $K_O(\varphi \mid Z) = K^{n-1}$. Ferner besitzt φ die Randwerte (1) und der Verzerrungssatz 2 sowie auch die Hilfssätze 4—6 sind für φ gültig. Wir beweisen nun, dass φ die Scheibe $G(t)$ für jedes $t \in R^1$ auf die Scheibe $G(Kt)$ abbildet.

Lemma 7. *Für jedes* $x \in Z$ *gilt*

$$\varphi_n(x) = Kx_n\,.$$

Beweis. Für fast jedes $y \in G(0)$ ist $L_g(y + te_n) \leqq K$ für fast jedes $t \in R^1$ und

$$\int\limits_{h_1}^{h_2} D_n g_n(y + te_n)\, dt = g_n(y + h_2 e_n) - g_n(y + h_1 e_n)\,,\ h_1 < h_2\,.$$

Da Satz 2 auch für g gilt, ist

$$K(h_2 - h_1) - 2d \leqq \int\limits_{h_1}^{h_2} D_n g_n(y + te_n)\, dt\,.$$

Daraus folgt wegen $D_n g_n \leqq L_g \leqq K$

$$\lim_{a \to \infty} \int_a^\infty (K - D_n g_n(y + te_n))\, dt = 0\,.\text{[1]} \tag{9}$$

Ferner gilt nach (9)

$$K(h_2 - h_1) - ((\varphi_n^i)(y + h_2 e_n) - (\varphi_n^i)(y + h_1 e_n))$$

$$= \int_{h_1}^{h_2} (K - D_n \varphi_n^i(y + te_n))\, dt = \int_{h_1}^{h_2} (K - D_n g_n(y + te_n + ie_n))\, dt$$

$$= \int_{h_1+i}^{h_2+i} (K - D_n g_n(y + ue_n))\, du \to 0 \quad \text{für} \quad i \to \infty\,,\ i \in J_1\,.$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{i \to \infty \\ i \in J_1}} \varphi^i = \varphi$ schliesst man hieraus

$$\varphi_n(y + he_n) - \varphi_n(y) = Kh$$

für beliebiges h und für fast jedes $y \in G(0)$. Somit ist

$$D_n \varphi_n(x) = K$$

fast überall in Z.

Aus Lemma 6, auf φ angewandt, folgt nun

$$D_n \varphi_n(x) = L_\varphi(x)$$

fast überall in Z. In diesen Punkten ist $D_k \varphi_n(x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, und nach dem Satz von Fubini also auch fast überall in $G(t)$ für fast jedes $t \in R^1$.

Hieraus folgt, dass $\varphi_n(x) = Kx_n$ in Z ist. Um dies zu sehen, wählen wir $t \in R^1$ derart, dass $\varphi \mid G(t)$ ASG ist und $D_k \varphi_n(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, fast überall in $G(t)$ verschwindet. Gilt nun $\varphi_n(p) \neq \varphi_n(q)$ für ein Punktpaar p, q von $G(t)$, so kann man aus $G(t)$ die Punkte p' und q' derart wählen, dass $\varphi_n(p') \neq \varphi_n(q')$ und φ_n absolut stetig auf einer Koordinatenlinie ist, die p' und q' in $G(t)$ verbindet. Ferner kann angenommen werden, dass $D_k \varphi_n$, $k = 1, \ldots, n-1$, fast überall auf der betreffenden Linie verschwindet. Durch Integration folgt dann der Widerspruch $\varphi_n(p') = \varphi_n(q')$. Gemäss der Randbedingung (1) ist das φ-Bild von $G(t)$ also die Scheibe $G(Kt)$. Nach Obigem gilt dies für fast jedes $t \in R^1$ und wegen der Stetigkeit von φ für jedes $t \in R^1$.

[1] Da wir bis jetzt die Abschätzung $L \leq K$ f.ü. nicht besitzen, können wir die entsprechende Grenzwertgleichung für f_n noch nicht verifizieren. Deshalb macht man Gebrauch von der φ-Funktion.

Bemerkung. Aus dem letzten Teil des obigen Beweises schliesst man: Gilt $D_k f_n = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, fast überall in Z, so ist $f_n(x) = Kx_n$ für jedes $x \in Z$. Wir werden diese Tatsache später gebrauchen.

Aus der Indexfolge J_1 kann man eine Indexfolge J_2 derart wählen, dass die Folge g^{-i}, $g^{-i}(x) = f(x - ie_n) + Kie_n$, $i \in J_2$, gegen einen Homöomorphismus $h : R^n \to R^n$ k-gleichmässig in R^n konvergiert, dessen Einschränkung auf Z quasikonform mit $K_O(h \mid Z) = K^{n-1}$ ist. Für die Folgen g^i, g^{-i}, $i \in J_2$, und ihre Grenzabbildungen g und h gelten dann die Hilfssätze 3—7; diese Sätze können also für $i \in J_2$ auch in entgegengesetzter Richtung formuliert werden. Gleichfalls kann man aus der Indexfolge J_2 eine Teilfolge J_3 so wählen, dass die Folgen φ^i und ψ^i, $\psi^i(x) = h(x - ie_n) + Kie_n$, $i \in J_3$, gegen gewisse Grenzabbildungen φ und ψ k-gleichmässig in R^n konvergieren. Nach Lemma 7 ist $\varphi_n(x) = Kx_n$, $\psi_n(x) = Kx_n$.

Aus dem folgenden Hilfssatz geht hervor, dass die Grundeigenschaft $G(t) \to G(Kt)$ der zweiten Regularisierung φ bzw. ψ auch für die ursprüngliche Abbildung f »im Unendlichen» gilt, mindestens für eine gewisse t-Folge.

Lemma 8. *Es gibt eine Teilfolge J_4 von N derart, dass für jedes $x \in G(0)$*

$$\lim_{m \to \infty} g_n^m(x) = 0 \, , \; \lim_{m \to \infty} g_n^{-m}(x) = 0 \, , \; m \in J_4 \, .$$

Beweis. Zu jedem $k \in N$ ist $\varphi_n^i(x) \to 0$, $\psi_n^i(x) \to 0$, $i \in J_3$, gleichmässig in der abgeschlossenen Hülle von $B^{n-1}(k) = \{y \in R^{n-1} \mid |y| < k\}$. Wir können also eine Zahl $i_k \in J_3$ so wählen, dass

$$|\varphi_n^{i_k}(x)| < \frac{1}{k} \, , \; |\psi_n^{i_k}(x)| < \frac{1}{k}$$

in $\overline{B^{n-1}(k)}$ gilt. Für i_k wählen wir ferner ein solches $j_k \in J_3$, dass

$$|g_n^{j_k}(x + i_k e_n) - g_n(x + i_k e_n)| < \frac{1}{k}$$

und

$$|g_n^{-j_k}(x - i_k e_n) - h_n(x - i_k e_n)| < \frac{1}{k}$$

für $x \in \overline{B^{n-1}(k)}$.

Setzen wir $J_4 = (i_k + j_k)$, so gehört ein beliebiges $x \in G(0)$ zu jedem $B(k)$, $k \in J_4$, falls $k > |x|$ ist. Die erste Behauptung von Lemma 8 ergibt sich aus der für jedes $x \in G(0)$ bestehenden Beziehung

$$
\begin{aligned}
& f(x + (i_k + j_k)e_n) - K(i_k + j_k)e_n \\
& = f((x + i_k e_n) + j_k e_n) - K j_k e_n - g(x + i_k e_n) + g(x + i_k e_n) - K i_k e_n \\
& = g^{j_k}(x + i_k e_n) - g(x + i_k e_n) + \varphi^{i_k}(x) \,.
\end{aligned}
$$

Die andere Behauptung folgt entsprechend aus der Gleichheit

$$f(x - (i_k + j_k)e_n) + K(i_k + j_k)e_n = g^{-j_k}(x - i_k e_n) - h(x - i_k e_n) + \psi^i(x) \,.$$

Beweis von Satz 4. Wir zeigen zuerst, dass

$$\int\limits_Z (L_f(x)^n - |D_n f_n(x)|^n) dm(x) = 0 \,.$$

Es sei $\sigma_j(x)$ die grössere der Zahlen $|g_n^j(x)|$, $|g_n^{-j}(x)|$ und $\eta_j(y)$ die grössere der Zahlen

(10) $$\max_{x \in G(0)} \{ |g_n^j(x)| \mid P_n(f(x + je_n)) = y \}$$

(11) $$\min_{x \in G(0)} \{ |g_n^{-j}(x)| \mid P_n(f(x - je_n)) = y \} \,.$$

Wie im Beweis von Lemma 2 erhält man

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{G(0)} (2Kj - 2\sigma_j(x))^n dm_{n-1}(x) & \leqq (2j)^{n-1} \int\limits_{Z(-j,j)} |D_n f_n(x)|^n dm(x) \\
& \leqq (2j)^{n-1} \int\limits_{Z(-j,j)} L_f(x)^n dm(x) \leqq (2Kj)^{n-1} m(fZ(-j\,,j)) \,,
\end{aligned}
$$

wobei

$$m(fZ(-j\,,j)) \leqq \int\limits_{G(0)} (2Kj + 2\eta_j(y)) dm(y) \,.$$

Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
0 \leqq \int\limits_{Z(-j,j)} (L_f(x)^n - |D_n f_n(x)|^n) dm(x) & \leqq 2K^{n-1} \int\limits_{G(0)} \eta_j(y) dm_{n-1}(y) \\
& - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} K^{n-k} (2j)^{-k+1} \int\limits_{G(0)} (2\sigma_j(x))^k dm_{n-1}(x) \,.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen nun, dass $\lim\limits_{j \to \infty} \eta_j(y) = 0$, $j \in J_4$, für jedes $y \in G(0)$ gilt. Sei $y \in G(0)$ und (x^j) diejenige Folge in $G(0)$, für welche $|g_n^j(x^j)|$ gleich (10) ist. Man wähle $p \in \partial G(0)$, wobei also $g^j(p) = p$. Nach Väisälä [6], Theorem 18.1, ist $|x^j - p|$ beschränkt, und daher gehört jedes x^j zu einem festen $B^{n-1}(k)$. Aus der gleichmässigen Konvergenz $g_n^j(x) \to 0$ in $B^{n-1}(k)$ folgt, dass auch (10) für $j = \infty$ gegen Null strebt. Dasselbe gilt auch für (11), daher ist $\lim_{j \to \infty} \eta_j(y) = 0$, $j \in J_4$.

Da $\sigma_j(x) \leqq d$, $\eta_j(y) \leqq d$ und $\lim_{j \to \infty} \sigma_j(x) = \lim_{j \to \infty} \eta_j(y) = 0$, $j \in J_4$, für alle $x \in G(0)$, $y \in G(0)$ ist, erhält man nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz

$$\int_Z (L_f(x)^n - |D_n f_n(x)|^n) dm(x) = 0 .$$

Hieraus folgt, dass $L_f(x) = |D_n f_n(x)|$ und also $D_k f_n = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, fast überall in Z ist. Aus der Bemerkung nach Lemma 7 folgt ferner, dass f jede Scheibe $G(t)$ auf $G(Kt)$ abbildet. Daher ist $L_f(x) = D_n f_n(x) = K$ für jedes $x \in Z$, und für fast alle $y \in G(0)$ ist also die Länge des f-Bildes jeder Strecke $\{y + te_n \mid a \leqq t \leqq b\}$ gleich $K(b-a)$. Hierbei gilt also $P_n(f(y + ae_n)) = P_n(f(y + be_n))$ und wegen der Stetigkeit von f sogar für alle $y \in G(0)$, was bedeutet, dass die x_n-Geraden auf x_n-Geraden übergehen. Schliesslich ist $\sigma_f(x) = 1$ fast überall in $G(0)$, vgl. Bemerkung nach Lemma 5. Somit ist Satz 4 bewiesen.

Durch das folgende Beispiel wird gezeigt, dass in dem Fall $K_O(f) = K^{n-1}$ die extremale Abbildung f keine Affine zu sein braucht. Das Beispiel ist für den Fall $n = 3$ konstruiert.

Beispiel. Es sei $Z = B \times R^1$ ein Zylinder, bei dem $B = B^2(0, 1)$ ist. Wir definieren zunächst eine differenzierbare Abbildung $w : B \to B$ durch die in Polarkoordinaten angegebene Gleichung

$$\begin{cases} R = r \\ \Phi = \varphi + 1 - r . \end{cases}$$

Bezeichnet man $z = x + iy$, so gilt $w(z) = z$ für $z \in \partial B$ und $J(z, w) = 1$ für $z \in B$, wie leicht ersichtlich ist. Aus

$$w(z) = e^i z e^{-i|z|}$$

erhält man für die Ableitung in die Richtung α im Punkte $z \in B \setminus \{0\}$

$$|\partial_\alpha w(z)| = |w_z(z) + w_{\bar z}(z) e^{-2i\alpha}| = \left| 1 - i\,|z|/2 - iz^2 e^{-2i\alpha}/2\,|z| \right|$$

und $|\partial_\alpha w(0)| = 1$. Daher ist $\sup\{|\partial_\alpha w(z)| \mid z \in B,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi\}$ gleich

$$K = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} .$$

Wegen $J(z, w) = 1$ ist w K^2-quasikonform.

Wir definieren nun die Abbildung $f: Z \to Z$ durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = (w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), Kx_3),$$

in der x_1 und w_1 die reellen bzw. x_2 und w_2 die imaginären Teile von z und w sind. Nach $J(z, w) = 1$ ist $J(x, f) = K$ und also $K_O(f) = K^2$, aber wegen der w-Konstruktion ist f keine Affine.

Wir betrachten noch den Fall $K_I(f) = K$.

Satz 5. *Gilt $K_I(f) = K$, so ist f die durch die Gleichheit* (1) *definierte Affine von Z.*

Beweis. Nach Satz 3 und der Ungleichung $K_O(f) \leqq K_I(f)^{n-1}$ ist $K_O(f) = K^{n-1}$ und Satz 4 also gültig. Es sei x ein regulärer Punkt von Z, in dem dazu $\sigma_f(P_n x) = 1$ ist. Bezeichnet man die Hauptachsenableitungen im Punkte x mit $\lambda_1 = D_n f_n(x) = K$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, wobei $\lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_n$, so ist wegen $\lambda_2 \ldots \lambda_n = 1$

$$\lambda_n \leqq 1,$$

also gilt nach $K = \lambda_1 = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \leqq K \lambda_n^n$

$$\lambda_n = 1.$$

Daher ist $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 1$, da $\lambda_2 \ldots \lambda_n = 1$.

Für fast jedes t definiert f also eine konforme Querschnittabbildung $h_t: G(t) \to G(Kt)$. Wegen der Randbedingung (1) ist h_t eine identische Abbildung, und nach seiner Stetigkeit fällt f mit der Affine

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, Kx_n)$$

zusammen.

Math. Inst. der Universität
Helsinki, Finnland

Literatur

[1] MARTIO, O., RICKMAN, S. und VÄISÄLÄ, J.: Definitions for quasiregular mappings. - Ann. Acad. Sci. Fenn. AI 448 (1969), 1–40.

[2] RICKMAN, S.: Removability theorems for quasiconformal mappings. - Ann. Acad. Sci. Fenn. AI 449 (1969), 1–8.

[3] STREBEL, K.: Eine Abschätzung der Länge gewisser Kurven bei quasikonformer Abbildung. - Ann. Acad. Sci. Fenn. AI 243 (1957), 1–10.

[4] —»— Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises. - Comment. Math. Helv. 36 (1962), 306–323.

[5] VÄISÄLÄ, J.: On quasiconformal mappings in space. - Ann. Acad. Sci. Fenn. AI 298 (1961), 1–36.

[6] —»— Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. - Lectures Notes in Mathematics 229, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York (1971), 1–144.

Gedruckt August 1973