

ÜBER DIE VERBANDCHARAKTERISIERUNG EINIGER NICHTENTARTETER FORMEN

JUKKA SARANEN

Es ist bekannt, daß in einem Hilbertraum eine Orthogonalabbildung $M \rightarrow M^\perp$ im Verband aller Teilräume mit den Bedingungen a) $M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$, b) $M^{\perp\perp} = M$, c) $M \cap M^\perp = (0)$ durch das Skalarprodukt definiert wird.

Umgekehrt zeigten Kakutani und Mackey [5]–[6], daß unter einigen Dimensionsbeschränkungen jede solche Abbildung im Verband aller Teilräume eines Banachraumes als eine Orthogonalabbildung eines Hilbertschen Skalarprodukts so dargestellt werden kann, daß die entsprechende Hilbertsche Norm mit der ursprünglichen Norm äquivalent ist.

In dieser Arbeit wird bewiesen: Verzichtet man auf die für die Definitheit wesentliche Bedingung c), so erhält man dennoch ein geeignetes Skalarprodukt. Außerdem wird das Resultat von Kakutani und Mackey auf Pontrjaginsche Räume verallgemeinert.

Entsprechende Aussagen für eine Algebrainvolution sind von Bognár [1] und dem Verfasser [7] hergeleitet worden.

Sei X ein Vektorraum über dem Körper \mathbf{K} ; \mathbf{K} sei \mathbf{R} oder \mathbf{C} . Eine Abbildung $b : X \times X \rightarrow \mathbf{K}$ heißt *nichtentartete symmetrische Bilinearform*, falls

- (1) $b(x, y) = 0$ für alle $y \Rightarrow x = 0$,
- (2) $b(y, x) = b(x, y)$,
- (3) $b\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^2 \beta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j b(x_i, y_j)$.

Eine Abbildung $b : X \times X \rightarrow \mathbf{K}$, die (1) und (3) erfüllt, heißt *nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform*, falls an Stelle von (2) die Relation

$$(4) \quad b(y, x) = -b(x, y)$$

trifft. Eine Abbildung $b : X \times X \rightarrow \mathbf{K}$ heißt *nichtentartete hermitesche Sesquilinearform*, wenn (1) und die Bedingungen

$$(5) \quad b(y, x) = \overline{b(x, y)},$$

$$(6) \quad b\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^2 \beta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \overline{\beta_j} b(x_i, y_j),$$

erfüllt sind. Jeden dieser drei Typen nennen wir der Kürze halber *Skalarprodukt*.

Das Skalarprodukt b eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt*, falls mit einer Konstante $\gamma > 0$

$$(7) \quad |b(x, y)| \leq \gamma \|x\| \|y\|$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Die Norm $\|\cdot\|$ *majorisiert* dann das Skalarprodukt. Alle Normen die in einem Vektorraum X eine Banachraumtopologie definieren und ein gegebenes Skalarprodukt majorisieren, sind äquivalent (vgl. [2], S. 63, Theorem 3.3; die Form da ist sesquilinear und hermitesch). Die durch ein beschränktes Skalarprodukt b definierten Zuordnungen $x \rightarrow b(x, y)$ sind stetige lineare Funktionale.

Läßt sich jedes stetige lineare Funktional f durch das Skalarprodukt b so darstellen, daß

$$(8) \quad f(x) = b(x, z) \quad \text{für alle } x \in X$$

mit einem Element $z \in X$ gilt, dann ist die Norm $\|\cdot\|$ *kompatibel* mit dem Skalarprodukt b .

Sei \mathcal{L} der Verband aller Teilräume also aller abgeschlossenen linearen Mannigfaltigkeiten des normierten Raumes X und sei b ein beschränktes Skalarprodukt von X . Dann definiert b für alle $M \in \mathcal{L}$ ein Orthogonal-komplement $M^\perp \in \mathcal{L}$:

$$(9) \quad M^\perp = \{x \in X \mid b(x, y) = 0, \forall y \in M\}.$$

Die Zuordnung $M \rightarrow M^\perp$ ist die durch b definierte *Orthogonalabbildung*.

Satz 1. *Die durch ein beschränktes Skalarprodukt b eines normierten Raumes X definierte Orthogonalabbildung $M \rightarrow M^\perp$ in \mathcal{L} hat die Eigenschaften a) $M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$, b) $M \subset M^{\perp\perp}$. Die gegebene Norm $\|\cdot\|$ ist kompatibel mit dem Skalarprodukt b genau dann, wenn $M = M^{\perp\perp}$ für alle $M \in \mathcal{L}$ gilt.*

Beweis. Die Eigenschaften a) und b) folgen direkt aus der Definition. Ferner folgt $M^{\perp\perp} = M$ für $M \in \mathcal{L}$ aus der Kompatibilität (vgl. [2], S. 68, Theorem 6.1). Sei umgekehrt $M = M^{\perp\perp}$ für alle $M \in \mathcal{L}$. Dann ist die Abbildung $M \rightarrow M^\perp$ bijektiv in \mathcal{L} . Unter der Annahme $\dim X \geq 2$ (die übrigen Fälle sind trivial) sind die maximalen echten Teilräume von X genau die Räume der Art $[x]^\perp$, $x \neq 0$. Ist $f \neq 0$ ein beschränktes lineares Funktional des Raumes X , so gilt für seinen Kern $N(f)$: $N(f) = [x_0]^\perp$ mit einem Vektor $x_0 \neq 0$. Aus der direkten Summe $X = [e] \dot{+} [x_0]^\perp$,

$f(e) = 1$, erhält man für die Zerlegung $x = \lambda e + m$, $m \in [x_0]^\perp$, die Relation $b(x, x_0) = \lambda b(e, x_0)$, woraus wegen der Nichtentartetheit $b(e, x_0) \neq 0$ gilt. Wähle $\mu = [b(e, x_0)]^{-1}$, dann ergibt sich

$$f(x) = \lambda = \lambda b(e, \mu x_0) = b(\lambda e + m, \mu x_0) = b(x, \mu x_0),$$

was die Kompatibilität zeigt.

Satz 2. *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über dem Körper \mathbf{K} mit Dimensionsbeschränkungen $\dim X \geq 3$ für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ und $\dim X = \infty$ für $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Falls im Verband \mathcal{L} aller Teilräume des Raumes X eine Zuordnung $M \rightarrow M'$ mit den Eigenschaften a) $M \subset N \Rightarrow N' \subset M'$, b) $M'' = M$ gegeben ist, so existiert im Raum X ein beschränktes Skalarprodukt, das diese Zuordnung als Orthogonalabbildung besitzt und mit dem die Norm $\|\cdot\|$ kompatibel ist.*

Beweis. Sei X^* der Banachraum der beschränkten linearen Funktionale des Raumes X . Unter den gegebenen Dimensionsbeschränkungen gibt es eine bijektive lineare oder antilineare Abbildung $T: X \rightarrow X^*$ derart, daß $T(M) = (M')^{\circ 1}$ für alle eindimensionalen $M \in \mathcal{L}$ gilt ([6], Beweis von Theorem 1). Entsprechend ist die Form $b(x, y) = T(y)(x)$ bilinear oder sesquilinear. Aus der Relation $[T(x)] = ([x']^{\circ})$ folgt $[x]' = ([x']^{\circ})^{\circ} = [T(x)]^{\circ}$. Für das Orthogonalkomplement gilt dann

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{x \mid T(y)(x) = 0, \forall y \in M\} = \cap \{[T(y)]^{\circ} \mid y \in M\} \\ &= \cap \{[y]'\mid y \in M\} = M'. \end{aligned}$$

Bedingung (1) ist eine Folgerung aus der Relation $X' = (0)$, die mit Hilfe der Bedingungen a) und b) leicht zu verifizieren ist. Wie in [5] und [6] verwenden wir die Relation $b(y, x) = 0 \Leftrightarrow b(x, y) = 0$. Sie folgt aus der Kette

$$\begin{aligned} T(y)(x) = 0 &\Leftrightarrow [T(y)] \subset [x]^{\circ} \Leftrightarrow ([y]')^{\circ} \subset [x]^{\circ} \\ &\Leftrightarrow ([x]')^{\circ} \subset [y]^{\circ} \Leftrightarrow T(x)(y) = 0. \end{aligned}$$

A. Die Form b sei bilinear. Wir zeigen, daß sie dann symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist.

AI. Wenn $[x] \subset [x]'$, wenn also $b(x, x) = 0$ für alle x gilt, so folgt die Schiefsymmetrie aus $b(x + y, x + y) = 0$.

AII. Wenn ein Vektor $x_0 \neq 0$ mit $[x_0] \cap [x_0]' = (0)$, das heißt mit $b(x_0, x_0) \neq 0$ existiert, so ist die Form b symmetrisch. Die Betrachtung reduziert sich auf die folgenden Fälle:

1) Aus $b(x, y) = 0$ folgt $b(y, x) = 0$.

¹⁾ $M^{\circ} = \{f \in X^* \mid f(x) = 0, \forall x \in M\}$ für $M \subset X, M \neq \emptyset$,
 $S^{\circ} = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}$ für $S \subset X^*, S \neq \emptyset$.

2) Nimmt man $b(x, y) \neq 0$, $b(x, x) \neq 0$ an, so gibt es eine Konstante λ mit $b(x, y) + \lambda b(x, x) = 0$, also $b(x, y + \lambda x) = 0$. Man erhält $b(y + \lambda x, x) = 0$ und daraus $b(y, x) + \lambda b(x, x) = 0$. Daher ist $b(y, x) = b(x, y)$.

3) Aus der Annahme $b(x, y) \neq 0$, $b(x, x) = b(y, y) = 0$, $b(x_0, y) \neq 0$ folgt die Existenz einer Konstante λ mit $b(x, y) + \lambda b(x_0, y) = 0$, also $b(x + \lambda x_0, y) = 0$. Daraus ergibt sich $b(y, x) + \lambda b(y, x_0) = b(y, x + \lambda x_0) = 0$. Andererseits gilt wegen 2) $b(x_0, y) = b(y, x_0)$ und damit auch $b(y, x) = b(x, y)$.

4) Die Möglichkeit $b(x, y) \neq 0$, $b(x, x) = b(y, y) = b(x_0, y) = b(x_0, x) = 0$ führt auf die Kette: $b(x, y) + \lambda b(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow b(x, y + x_0) + \lambda b(x_0, y + x_0) = 0 \Rightarrow b(x + \lambda x_0, y + x_0) = 0 \Rightarrow b(y, x) + \lambda b(x_0, x_0) = b(y + x_0, x + \lambda x_0) = 0$. Auch hier folgt $b(y, x) = b(x, y)$.

B. Sei $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und die Form b sei sesquilinear. Wir beweisen die Existenz einer Konstante $\lambda \neq 0$ derart, daß $b_1 = \lambda b$ hermitesch ist.

Es gibt einen Vektor x_0 mit der Eigenschaft $b(x_0, x_0) \neq 0$, denn falls $b(z, z)$ für alle z verschwindet, folgern wir aus $b(x + y, x + y) = b(x + iy, x + iy) = 0$ die Relationen $b(x, y) = -\overline{b(y, x)}$, $b(x, y) = b(y, x)$. Dann verschwindet die Form b identisch im Widerspruch zu (1). Wir wählen eine Konstante λ so, daß für die Form $b_1 = \lambda b$ die Gleichung $b_1(x_0, x_0) = 1$ gilt. Es zeigt sich, daß $b_1(x, x)$ dann immer reell ist. Nimmt man $\text{Im } b_1(y, y) \neq 0$ an, so kann man eine Zahl $\xi \neq 0$ derart wählen, daß $\text{Im } (b_1(x_0, z) + b_1(z, x_0)) = 0$ mit $z = \xi y$ ist. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} & 2i \text{Im}(b_1(x_0, \xi y) + b_1(\xi y, x_0)) \\ &= \xi (b_1(y, x_0) - \overline{b_1(x_0, y)}) + \overline{\xi} (b_1(x_0, y) - \overline{b_1(y, x_0)}) \\ &= 2i \text{Im } \xi (b_1(y, x_0) - b_1(x_0, y)). \end{aligned}$$

Ferner wählen wir eine Konstante $\tau \neq 0$ mit

$$\begin{aligned} & b_1(x_0 + \tau z, x_0 + \overline{\tau} z) \\ &= b_1(x_0, x_0) + \tau b_1(z, x_0) + \overline{\tau} b_1(x_0, z) + \tau \overline{\tau} b_1(z, z) = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser und aus $b_1(x_0 + \overline{\tau} z, x_0 + \tau z) = 0$ erhält man die Relationen

$$\begin{aligned} & b_1(x_0, x_0) + \overline{\tau} \overline{b_1(z, x_0)} + \overline{\tau} \overline{b_1(x_0, z)} + \overline{\tau}^2 \overline{b_1(z, z)} = 0, \\ & b_1(x_0, x_0) + \overline{\tau} b_1(z, x_0) + \overline{\tau} b_1(x_0, z) + \overline{\tau}^2 b_1(z, z) = 0, \end{aligned}$$

die wegen $\tau \neq 0$ auf den Widerspruch $\text{Im } b_1(z, z) = 0$ führen.

Aus

$$\begin{aligned} & b_1(x + y, x + y) = b_1(x, x) + b_1(x, y) + b_1(y, x) + b_1(y, y), \\ & b_1(x + iy, x + iy) = b_1(x, x) - i b_1(x, y) + i b_1(y, x) + b_1(y, y) \end{aligned}$$

folgern wir

$$\begin{aligned} 2 b_1(x, y) &= \\ b_1(x + y, x + y) + i b_1(x + i y, x + i y) - (1 + i) [b_1(x, x) + b_1(y, y)], \\ 2 b_1(y, x) &= \\ b_1(x + y, x + y) - i b_1(x + i y, x + i y) - (1 - i) [b_1(x, x) + b_1(y, y)] \end{aligned}$$

und hieraus die Relation $b_1(y, x) = \overline{b_1(x, y)}$.

Nach Satz 1 genügt es die Beschränktheit der Form b zu beweisen. Falls $x_n \rightarrow 0$ und $T x_n \rightarrow f \in X^*$, erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \lim |T(x_n)(x)| = \lim |b(x, x_n)| = \lim |b(x_n, x)| \\ &= \lim |T(x)(x_n)| = 0. \end{aligned}$$

Weil die Räume X und X^* vollständig sind, folgt die Stetigkeit von T aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Dann gilt

$$|b(x, y)| = |T(y)(x)| \leq \|T\| \|y\| \|x\|.$$

F o l g e r u n g. Mit den Annahmen des obigen Satzes gelten: Ist $[x] \subset [x]'$ für alle x , so kann man das Skalarprodukt bilinear und schiefsymmetrisch wählen. Falls ein Vektor $x_0 \neq 0$ mit $[x_0] \cap [x_0]' = (0)$ existiert, unterscheiden wir die folgenden Fälle:

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Das Skalarprodukt kann bilinear und symmetrisch gewählt werden.

$\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Das Skalarprodukt kann sesquilinear und hermitesch gewählt werden genau dann, wenn ein zweidimensionaler Teilraum M von X so existiert, daß $[x] \cap [x]' = (0)$ für alle $x \in M$ ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann man das Skalarprodukt bilinear und symmetrisch wählen.

Beweis. Die Behauptung im reellen Fall folgt direkt aus dem Beweis von Satz 2. Sei $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und b ein sesquilineares hermitesches Skalarprodukt in X . Wir wählen einen endlichdimensionalen nichtentarteten Teilraum L mit $\dim L \geq 3$ (vgl. [3], S. 305, Lemma 2.1; das analoge Resultat gilt auch in diesem Fall). Dann besitzt L eine direkte und orthogonale Zerlegung $L = L_+ \oplus L_-$, wobei L_+ bzw. L_- ein positiver bzw. negativer Teilraum ist. Insbesondere existiert ein zweidimensionaler positiver oder negativer Teilraum M von X , und für einen solchen ist $[x] \cap [x]' = (0)$ für alle $x \in M$. Ist dagegen b bilinear und symmetrisch und ist $\{x, y\}$ linear unabhängig mit $b(x, x) \neq 0$, $b(y, y) \neq 0$, dann gibt es eine Konstante λ , so daß $b(x + \lambda y, x + \lambda y) = b(x, x) + 2\lambda b(x, y) + \lambda^2 b(y, y)$ verschwindet. Also gilt für die Orthogonalabbildung $[x + \lambda y] \cap [x + \lambda y]' \neq 0$.

Ein sesquilineares hermitesches Skalarprodukt b des Vektorraumes X heißt *zerlegbar*, wenn es eine orthogonale Zerlegung

$$(10) \quad X = X_+ \oplus X_-$$

in eine positive und eine negative lineare Mannigfaltigkeit X_+ bzw. X_- gibt. Das zerlegbare Skalarprodukt b hat einen *finiten Rang* k , *der Indefinitheit*, $k = 0, 1, 2, \dots$, wenn für eine Zerlegung (10) (und dann auch für alle anderen Zerlegungen) die Relation $\min \{ \dim X_+, \dim X_- \} = k$ gilt. Falls das Skalarprodukt b zerlegbar ist, und falls für wenigstens eine Zerlegung (10) die Räume $(X_+, b|X_+)$, $(X_-, -b|X_-)$ Hilberträume sind, heißt (X, b) ein *\mathcal{J} -Raum*. Sind dann P_+, P_- die zur Zerlegung (10) gehörenden Projektoren, und ist $J = P_+ - P_-$, so ist $(x, y) = b(Jx, y)$ ein Hilbertsches Skalarprodukt in X , und die zugehörige Norm (eine natürliche Norm) majorisiert das Skalarprodukt b . Ist (X, b) ein \mathcal{J} -Raum und hat außerdem die Form b einen finiten Rang k der Indefinitheit, so heißt (X, b) ein *k -indefiniten Pontrjaginscher Raum*. Zur Theorie der \mathcal{J} -Räume und Pontrjaginsche Räume siehe zum Beispiel Literaturverzeichnis in [2].

Das folgende Lemma wird etwas allgemeiner formuliert als eigentlich nötig für unsere Zwecke.

L e m m a 3. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum dessen Norm mit einem zerlegbaren beschränkten Skalarprodukt b kompatibel ist. Für alle Zerlegungen $X = X_+ \oplus X_-$ sind die Räume $(X_+, b|X_+)$ und $(X_-, -b|X_-)$ vollständig. Insbesondere ist (X, b) ein \mathcal{J} -Raum, dessen natürliche Normen mit $\|\cdot\|$ äquivalent sind.*

Beweis. Wenn \bar{X}_+ die Abschließung von X_+ bezeichnet, gilt $\bar{X}_+ = X_+ \oplus (\bar{X}_+ \cap X_-)$. Aus der Beschränktheit von b folgt, daß $b(x, x) \geq 0$ für alle $x \in \bar{X}_+$ gilt, und folglich $\bar{X}_+ \cap X_- = (0)$ ist. Daher sind X_+ und ebenfalls X_- abgeschlossen. Weil X vollständig ist, sind die zur Zerlegung $X = X_+ \oplus X_-$ gehörenden Projektoren P_+ und P_- stetig, also definiert $(x, y) = b(Jx, y)$, $J = P_+ - P_-$, ein positiv definites Skalarprodukt, so daß für die entsprechende Norm $|\cdot|$ die Relation $|x| \leq \gamma \|x\|$ gilt. Es gibt aber auch ein $\beta > 0$ mit $|x| \geq \beta \|x\|$; denn andernfalls gäbe es eine beschränkte Folge $|x_n|$ mit $\|x_n\| \rightarrow \infty$. Wegen der Kompatibilität definiert die Gleichung $S(y)(x) = b(x, y)$ eine bijektive antilineare und in beiden Richtungen stetige Zuordnung $S: X \rightarrow X^*$. Dann gilt $\|S(x_n)\| \rightarrow \infty$ und folglich $|S(x_n)(y)| \rightarrow \infty$ für wenigstens einen Vektor y . Man erhält $|b(x_n, y)| = |S(y)(x_n)| = |S(x_n)(y)| \rightarrow \infty$. Der Widerspruch folgt aus der Relation $|b(x_n, y)| = |(x_n, Jy)| \leq |x_n| |Jy|$. Aus der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ und aus der Vollständigkeit von X_+ und X_- bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ erhält man dann die Vollständigkeit von $(X_+, b|X_+)$ und $(X_-, -b|X_-)$.

Lemma 4. Sei b ein bilineares symmetrisches beschränktes Skalarprodukt eines unendlichdimensionalen komplexen normierten Raumes X . Dann gibt es einen unendlichdimensionalen Teilraum M mit $M \subset M^\perp$.

Beweis. Es gibt einen Vektor x_1 mit $b(x_1, x_1) = 0$ (vgl. den Beweis der Folgerung von Satz 2). Sei F_1 ein nichtentarteter endlichdimensionaler Teilraum von X mit $x_1 \in F_1$ ([3], S. 305, Lemma 2.1). Dann ist $X = F_1 \oplus F_1^\perp$, und wenn man $x_2 \in F_1^\perp$, $x_2 \neq 0$, mit $b(x_2, x_2) = 0$ wählt, erhält man $b(x_i, x_j) = 0$, $i, j = 1, 2$. Durch Induktion gibt es eine Folge $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$ mit $b(x_i, x_j) = 0$ für alle i, j . In der von den Elementen x_i aufgespannten linearen Mannigfaltigkeit N gilt $b(x, y) = 0$, $x, y \in N$, und wegen der Beschränktheit von b besteht das auch in der abgeschlossenen Hülle $M = \bar{N}$.

Der folgende Satz verallgemeinert das Resultat von Kakutani und Mackey [5]—[6].

Satz 5. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über \mathbf{K} mit $\dim X \geq 3$ für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ und $\dim X = \infty$ für $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Wenn im Verband \mathcal{L} aller Teilräume des Raumes X eine Zuordnung $M \rightarrow M'$ mit den Eigenschaften

- a) $M \subset N \Rightarrow N' \subset M'$,
- b) $M'' = M$,
- c) es existiert $x_0 \neq 0: [x_0] \cap [x_0]' = (0)$,
- d) $\max \{ \dim M \mid M \subset M' \} = k$

für ein $k = 0, 1, 2, \dots$ gegeben ist, so kann diese Zuordnung als eine Orthogonalabbildung dargestellt werden, die durch ein k -indefinites Pontrjaginsches Skalarprodukt erzeugt wird. Die zu diesem Skalarprodukt gehörenden natürlichen Normen sind mit $\|\cdot\|$ äquivalent.

Beweis. Aus den Bedingungen folgt, daß die Abbildung $M \rightarrow M'$ als eine Orthogonalabbildung eines sesquilinearen hermiteschen beschränkten Skalarproduktes dargestellt werden kann; denn wegen c) ist Schiefsymmetrie und im komplexen Fall ist wegen d) eine bilineare symmetrische Form ausgeschlossen. Aus der Bedingung d) schließen wir dann, daß das erhaltende Skalarprodukt einen finiten Rang k der Indefinitheit hat ([1], S. 62, Lemma 2). Lemma 3 führt dann den Beweis zur Ende.

Satz 5 liefert in der Tat eine Verallgemeinerung des Kakutani-Mackeyschen Resultates, denn im Fall $k = 0$ ist die Bedingung c) wegen d) unnötig und d) ist äquivalent mit

- e) $M \cap M' = (0)$ für alle $M \in \mathcal{L}$.

Die Betrachtung eines bilinearen und schiefsymmetrischen Skalarproduktes in einem Raum gerader Dimension zeigt, daß im allgemeinen eine zusätzliche Bedingung außer den Bedingungen a), b), d) wirklich erforderlich ist. Wenn die Dimension des Raumes ungerade ist, benötigt man diese Bedingung nicht, denn in einem solchen Raum gibt es kein bilineares schiefsymmetrisches Skalarprodukt (vgl. [4], S. 160—161).

Literatur

- [1] BOGNÁR, J.: Involution as operator conjugation. - Colloquia mathematica Societatis János Bolyai 5: Hilbert space operators and operator algebras [Tihany 1970]. (Edited by B. Sz.-Nagy.) (Distributed by) North-Holland Publishing Company, Amsterdam – London, 1972, 53 – 64.
- [2] – » – Indefinite inner product spaces. - Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 78, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1974.
- [3] FISCHER, H. R., und H. GROSS: Quadratic forms and linear topologies I. - Math. Ann. 157, 1964, 296 – 325.
- [4] JACOBSON, N.: Lectures in abstract algebra. II. Linear algebra. - The university series in higher mathematics. D. van Nostrand Company, Inc., Princeton N. J., Toronto – London – New York, 1953.
- [5] KAKUTANI, S., und G. W. MACKEY: Two characterizations of real Hilbert space. - Ann. of Math. (2) 45, 1944, 50 – 58.
- [6] – » – – » – Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space. - Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1946, 727 – 733.
- [7] SARANEN, J.: Charakterisierung einiger Sesquilinear- und Bilinearformen mit Hilfe von Adjunktionen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 581, 1974, 1 – 40.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Eingegangen am 1. Oktober 1974