Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 2, 1976, 327 – 343

Commentationes in honorem
Rolf Nevanlinna
LXXX annos nato

ÜBER DAS VERALLGEMEINERTE DIRICHLETPROBLEM FÜR KOERZITIVE LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ILPPO SIMO LOUHIVAARA und CHRISTIAN G. SIMADER

1. Einleitung. Problemstellung

1.1. Rolf Nevanlinna hat zu Beginn der fünfziger Jahre in unveröffentlichten Vorträgen und kurz in [19] angeregt, das verallgemeinerte Dirichletproblem für beliebige (nicht notwendig elliptische) lineare partielle Differentialoperatoren mittels der von ihm in [17] – [21] entwickelten Theorie der Hilberträume, auf denen noch zusätzlich ein indefinites Skalarprodukt gegeben ist, anzugehen.

Dieser bestechenden Idee folgend hat einer der beiden Verfasser der vorliegenden Note, Schüler von Rolf Nevanlinna, das Dirichletproblem für eine spezielle gleichmäßig elliptische formal selbstadjungierte lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in [12] – [13] und das verallgemeinerte Dirichletproblem für allgemeine (auch nichtelliptische) formal selbstadjungierte lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in [14] behandelt. Diese Untersuchungen wurden von Felix E. Browder [2] – [3] und Walter Littman [11] sowie im Anschluß an einige Arbeiten von Ernst Hölder auch von Stefan Hildebrandt [8] weitergeführt.

Peter Hess hat in seiner Arbeit [7] die Frage der Existenz schwacher Lösungen des Dirichletproblems für (nicht notwendig elliptische) lineare partielle Differentialoperatoren untersucht. Er führt zwei formal verschiedene Klassen solcher Differentialoperatoren ein und zeigt, daß in diesen Klassen ein in Form einer Orthogonalitätsbedingung gegebenes Kriterium sowohl notwendig als hinreichend für die Existenz wenigstens einer schwachen Lösung des Dirichletproblems ist. Die eine Klasse ist durch eine Kompaktheitsbedingung charakterisiert (Bedingung K). Die andere formal interessanter erscheinende Klasse besteht aus den Differentialoperatoren, die einer a priori -Abschätzung vom Typ der Gårding-

doi:10.5186/aasfm.1976.0222

schen Ungleichung genügen (Bedingung GU); die Differentialoperatoren dieser Klasse werden wir als stark $2t$-koerzitiv ($t \in \boldsymbol{N}$)[1]) bezeichnen. Die in einer offenen Menge $G \subset \boldsymbol{R}^n$ gleichmäßig stark elliptischen linearen partiellen Differentialoperatoren der Ordnung $2m$ fallen für $m \geqq t$ unter die Klasse der stark $2t$-koerzitiven Differentialoperatoren, aber andrerseits umfaßt diese Klasse sogar nichthypoelliptische Operatoren (man vergleiche [16]).

In der Arbeit [7] von Hess sowie auch in den oben zitierten früheren Arbeiten wurde die Spektralzerlegung der selbstadjungierten linearen Operatoren des Hilbertraumes wesentlich benutzt.

In der vorliegenden Note leiten wir zunächst in elementarer Weise aus den beiden Bedingungen von Hess semi-Fredholmsche Eigenschaften für das verallgemeinerte Dirichletproblem her. Danach studieren wir den Zusammenhang dieser Bedingungen. Schließlich geben wir für den Fall der stark $2t$-koerziven Differentialoperatoren mit konstanten komplexen Koeffizienten eine uns noch etwas grob erscheinende algebraische Charakterisierung an.

Wegen weiterer Literaturhinweise verweisen wir auf [7], [15], S. 73, und [16]. Die von Hess betrachtete Form der Gårdingschen Ungleichung wurde auch von Gerd Grubb in anderem Zusammenhang [4] – [6] eingeführt.

1.2. Wir benutzen hier die in [16] erklärten Bezeichnungen; z. B. wird geschrieben $D_j := -i\,\partial/\partial x_j$.

Sei G eine offene Menge in $\boldsymbol{R}^n$. Für jedes ganzzahlige $t \geqq 0$ sei $C^t_*(G)$ die lineare Menge der Elemente v aus $C^t(G)$ mit

$$\sum_{|\sigma| \leqq t} \int_G |D^\sigma v(x)|^2 \, dx < \infty .$$

Durch

$$(v\,, w)_t := \sum_{|\sigma| \leqq t} \int_G \overline{D^\sigma v(x)}\, D^\sigma w(x) \, dx$$

wird ein Skalarprodukt für Elemente $v\,, w \in C^t_*(G)$ erklärt. Der Sobolevraum $H^t(G)$ wird als Vervollständigung von $C^t_*(G)$ in bezug auf das Skalarprodukt $(\ ,\ )_t$ definiert. Auch in $H^t(G)$ wird das Skalarprodukt mit $(\ ,\ )_t$ und die entsprechende Norm mit $\|\ \|_t$ bezeichnet. Ferner sei $H^t_0(G)$ die Abschließung von $C^\infty_0(G)$ in $H^t(G)$. Die Elemente aus $H^t_0(G)$ haben im erweiterten Sinne homogene Randwerte bis zu den Ableitungen der Ordnung $t-1$.

---

[1]) Mit $\boldsymbol{N}$ wird die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet.

Wir betrachten einen linearen partiellen Differentialoperator

$$L(x\,,D)\;:=\;\sum_{|\sigma|\leqq r} a_\sigma(x)\,D^\sigma$$

der Ordnung $r \in \boldsymbol{N}$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_\sigma \in C^{|\sigma|}(\overline{G})$.

Mit $L'(.\,,D)$ bezeichnen wir den durch

$$L'(x\,,D)\,v(x)\;:=\;\sum_{|\sigma|\leqq r} D^\sigma\left(\overline{a_\sigma(x)}\,v(x)\right)$$

für $v \in C^r(G)$ erklärten, dem Operator $L(.\,,D)$ formal adjungierten Differentialoperator. Für $\varphi\,,\psi\;\in C_0^\infty(G)$ gilt dann

$$(L(.\,,D)\,\psi\;,\;\varphi)_0\;=\;(\psi\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0\,.$$

Ein Element $g \in L^2(G)$ wird eine *zulässige Randwertvorgabe* für das verallgemeinerte Dirichletproblem zum Operator $L(.\,,D)$ mit Dirichletdaten bis zur Ordnung $t-1$ ($t \in \boldsymbol{N}$) genannt, falls das durch

$$b_g(\varphi)\;:=\;(g\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0\qquad\text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

dicht in $H_0^t(G)$ erklärte lineare Funktional bezüglich $\|\;\|_t$ beschränkt ist, d. h. falls mit einer Konstanten $K > 0$

$$|(g\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0|\;<\;K$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ mit $\|\varphi\|_t \leqq 1$ gilt.

Analog wie in der Theorie der elliptischen Randwertprobleme stellt man das verallgemeinerte Dirichletproblem zum Differentialoperator $L(.\,,D)$ mit Dirichletdaten bis zur Ordnung $t-1$ ($t \in \boldsymbol{N}$) (für die Problemstellung vergleiche man Hess [7], S. 5–8):

P r o b l e m I. *Gegeben seien* $f \in L^2(G)$ *und eine zulässige Randwertvorgabe* $g \in L^2(G)$. *Gesucht wird* $u \in L^2(G)$ *derart, daß*

$$(u\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0\;=\;(f\,,\varphi)_0\qquad\textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

gilt und $v := u-g \in H_0^t(G)$ *ist.*

Äquivalent diesem Problem ist

P r o b l e m II. *Gegeben seien* $f \in L^2(G)$ *und eine zulässige Randwertvorgabe* $g \in L^2(G)$. *Gesucht wird* $v \in H_0^t(G)$ *derart, daß*

$$(v\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0\;=\;(f\,,\varphi)_0-(g\;,\;L'(.\,,D)\,\varphi)_0\qquad\textit{für alle}\quad \varphi \in C^\infty(G)$$

gilt.

Für jedes feste $\varphi \in C_0^\infty(G)$ ist durch

$$l_\varphi(v)\;:=\;(L'(.\,,D)\,\varphi\;,\;v)_0\qquad\text{für } v \in H_0^t(G)$$

ein stetiges lineares Funktional l_φ auf $H_0^t(G)$ erklärt. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet–Riesz existiert daher ein linearer Operator

T mit der Definitionsmenge $D(T) = C_0^\infty(G) \subset H_0^t(G)$ und mit einer Wertemenge in $H_0^t(G)$ derart, daß

$$(1.1) \qquad (L'(.\,,D)\,\varphi\,,\,v)_0 = (T\,\varphi\,,v)_t \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(G) \text{ und } v \in H_0^t(G)$$

gilt. Der Operator T ist also dicht in $H_0^t(G)$ definiert. Weil somit

$$(T\,\varphi\,,\psi)_t = (L'(.\,,D)\,\varphi\,,\,\psi)_0 = (\varphi\,,\,L(.\,,D)\,\psi)_0 = (\varphi\,,T^*\,\psi)_t$$

für alle $\varphi\,,\psi \in C_0^\infty(G)$ gilt, ist $C_0^\infty(G)$ in der Definitionsmenge $D(T^*)$ des dem Operator T adjungierten Operators T^* enthalten und daher T abschließbar mit der kleinsten abgeschlossenen Fortsetzung $T^\sim = T^{**}$.

Da g als eine zulässige Randwertvorgabe vorausgesetzt wurde, ist durch

$$d_{f,g}(\varphi) := (f\,,\varphi)_0 - (g\,,\,L'(.\,,D)\,\varphi)_0 \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

ein dicht in $H_0^t(G)$ definiertes beschränktes lineares Funktional gegeben, das wiederum nach dem Darstellungssatz von Fréchet–Riesz mit einem $z \in H_0^t(G)$ die Darstellung

$$(1.2) \qquad (f\,,\varphi)_0 - (g\,,\,L'(.\,,D)\,\varphi)_0 = (z\,,\varphi)_t \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

hat.

Den Problemen I und II ist somit äquivalent

Problem III. *Seien $f \in L^2(G)$ und eine zulässige Randwertvorgabe $g \in L^2(G)$ gegeben. Sei das Element $z \in H_0^t(G)$ durch (1.2) und der Operator T durch (1.1) erklärt. Gesucht ist $v \in D(T^*)$ mit $T^*\,v = z$.*

2. Eine Kompaktheitsbedingung

2.1. Peter Hess hat in [7], Satz 3.3, S. 13, eine Klasse von Differentialoperatoren durch die folgende Kompaktheitsbedingung eingeführt:

Bedingung K. *Zu dem in G erklärten Differentialoperator $L(.\,,D)$ existiere eine positive Zahl δ derart, daß jede lineare Menge $M \subset C_0^\infty(G)$, für deren Elemente φ die Ungleichung*

$$|\mathrm{Re}\,(L(.\,,D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0| \leqq \delta\,\|\varphi\|_t^2$$

gilt, endlichdimensional ist.

Wir werden einen elementaren Beweis für das folgende Resultat von Hess geben:

Satz 2.1. *Der Differentialoperator $L(.\,,D)$ erfülle Bedingung K. Dann ist die Dimension des Nullraumes $N(T^\sim)$ von $T^\sim$ endlich ($\dim N(T^\sim) < \infty$), die Wertemengen $R(T^\sim)$ und $R(T^*)$ sind (in $H_0^t(G)$) abgeschlossen, und es gilt daher $R(T^*) = N(T^\sim)^\perp$ und $R(T^\sim) = N(T^*)^\perp$.*

Problem III hat also eine (bis auf ein additives Element aus $N(T^*)$ [2]) *eindeutig bestimmte) Lösung dann und nur dann, wenn*

$$(z, w)_t = (f, w)_0 - b_g^\sim(w) = 0$$

für alle Elemente w *aus dem (endlichdimensionalen) Raum* $N(T^\sim)$ *gilt, wobei* $b_g^\sim$ *die stetige Fortsetzung von* b_g *auf* $H_0^t(G)$ *bezeichnet.*

2.2. Für unseren Beweis von Satz 2.1 benötigen wir

Lemma 2.2. *Im Hilbertraum* H *sei ein dicht definierter abgeschlossener linearer Operator* T *gegeben, der nicht der Nulloperator ist. Falls keine Zahl* $\gamma > 0$ *derart existiert, daß* $\|T w\| \geqq \gamma \|w\|$ *für alle* $w \in D(T) \cap N(T)^\perp$ *gilt, dann gibt es zu jeder vorgegebenen Folge* $\{\varepsilon_j\}$ *von positiven Zahlen mit* $\varepsilon_j > \varepsilon_{j+1}$ *und* $\lim \varepsilon_j = 0$ *eine orthonormierte Folge* $\{v_j\} \subset D(T) \cap N(T)^\perp$ *mit der Eigenschaft* $\|T v_j\| < \varepsilon_j$.

Beweis. Wir konstruieren die Folge $\{v_j\}$ induktiv. Da T abgeschlossen und nicht der Nulloperator ist, gilt $D(T) \cap N(T)^\perp \neq \{0\}$ [3]. Aus der Voraussetzung folgt nun die Existenz eines Elementes $v_1 \in D(T) \cap N(T)^\perp$ mit $\|v_1\| = 1$ und $0 < \|T v_1\| < \varepsilon_1$. Angenommen, daß zu einem $k \in \boldsymbol{N}$ ein orthonormiertes System von Elementen $\{v_1, \dots, v_k\} \subset D(T) \cap N(T)^\perp$ mit $\|T v_j\| < \varepsilon_j$ existiert, sei Λ_k die lineare Hülle von $\{v_1, \dots, v_k\}$, und es sei $W_k := N(T) \oplus \Lambda_k$ $(\subset D(T))$. Es ist $D(T) \cap W_k^\perp \neq \{0\}$. Denn sonst wäre $D(T) = W_k$, woraus $D(T) \cap N(T)^\perp = \Lambda_k$ folgen würde; wegen $T v \neq 0$ für alle $v \neq 0$ aus dem endlichdimensionalen Raum Λ_k gäbe es eine Konstante $\gamma > 0$ derart, daß $\|T w\| \geqq \gamma \|w\|$ für alle $w \in \Lambda_k = D(T) \cap N(T)^\perp$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man nehme nun als Antithese an, daß in $D(T) \cap W_k^\perp$ kein v mit $\|v\| = 1$ und $\|T v\| < \varepsilon_{k+1}$ existiert. Dann ist

$$\|T v\| \geqq \varepsilon_{k+1} \|v\| \tag{2.1}$$

für alle $v \neq 0$ aus $D(T) \cap W_k^\perp$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $\{w_j\} \subset D(T) \cap N(T)^\perp$ mit $\|w_j\| = 1$ und $\|T w_j\| \to 0$ für $j \to \infty$. Jedes w_j besitzt eine orthogonale Zerlegung $w_j = w_j' + w_j''$ mit $w_j' \in W_k$ und $w_j'' \in W_k^\perp$. Für jedes $y \in N(T)$ ist nun $(w_j', y) = (w_j, y) - (w_j'', y) = 0$, also ist $w_j' \in W_k \cap N(T)^\perp = \Lambda_k \subset D(T)$; wegen $w_j'' = w_j - w_j'$ folgt $w_j'' \in D(T)$. Weil $\{w_j'\}$ eine beschränkte Folge in dem

---

[2]) Man bemerke, daß $N(T^*)$ unendlichdimensional sein kann.

[3]) Weil T und dadurch $N(T)$ $(\subset D(T))$ abgeschlossen ist, hat jedes Element $w \in D(T)$ eine orthogonale Zerlegung $w = w' + w''$, wobei $w' \in N(T)$ und $w'' \in N(T)^\perp$ sind. Wegen der Linearität von $D(T)$ ist $w'' = w - w' \in D(T)$. Wäre $D(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$, so würde $w'' = 0$ sein, also $w = w' \in N(T)$, und T wäre der Nulloperator.

endlichdimensionalen Raum Λ_k ist, gibt es ein $w' \in \Lambda_k$ und eine Teilfolge $\{w'_{j_\mu}\}$ von $\{w'_j\}$ derart, daß $\{w'_{j_\mu}\}$ gegen w' konvergiert. Da die Einschränkung von T auf Λ_k stetig ist, gilt auch $T\,w'_{j_\mu} \to T\,w'$, weshalb $T\,w''_{j_\mu} = T\,w_{j_\mu} - T\,w'_{j_\mu} \to -T\,w'$ für $\mu \to \infty$ folgt. Nach (2.1) ist aber dann

$$\|w''_{j_\mu} - w''_{j_\nu}\| \leqq \frac{1}{\varepsilon_{k+1}} \|T\,w''_{j_\mu} - T\,w''_{j_\nu}\| \to 0\,,$$

also konvergiert $\{w''_{j_\mu}\}$ gegen ein w'' und daher $\{w_{j_\mu}\}$ gegen $w := w' + w''$. Da T abgeschlossen ist, folgt aus den beiden Relationen $w_{j_\mu} \to w$ und $T\,w_{j_\mu} \to 0$, daß w zu $D(T)$ gehört und $T\,w = 0$ gilt, also ist $w \in N(T)$. Wegen $\|w_{j_\mu}\| = 1$ ist auch $\|w\| = 1$. Andrerseits ist $\{w_{j_\mu}\} \subset N(T)^\perp$, also $w \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$ im Widerspruch zu $\|w\| = 1$.

2.3. Wir beweisen jetzt Satz 2.1.

A. Einer Idee von Hess [7], S. 13–15, folgend zeigen wir zuerst, daß $\dim N(T^\sim) < \infty$ ist. Als Antithese nehmen wir an: Es sei $\dim N(T^\sim) = \infty$. Dann existiert eine unendliche in bezug auf das Skalarprodukt $(\ ,\ )_t$ orthonormierte Folge $\{w_j\} \subset N(T^\sim)$. Sei $\varkappa := \delta\,/\,(1+\delta)$. Weil $T^\sim$ die Abschließung von T ist, existiert zu jedem j ein $\varphi_j \in C_0^\infty(G)$ mit $\|w_j - \varphi_j\|_t \leqq \varkappa/2^{j/2}$ und $\|T\,\varphi_j\| \leqq \varkappa/2^{j/2}$. Sei Λ_1 die lineare Hülle von $\{w_j\}$ und Λ_2 die lineare Hülle von $\{\varphi_j\}$. Für

$$w := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,w_j \in \Lambda_1$$

sei

$$\varphi := \lambda(w) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,\varphi_j \in \Lambda_2$$

gesetzt. Dadurch wird eine bijektive lineare Abbildung $\lambda : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ erklärt. Für $w \in \Lambda_1$ und $\varphi = \lambda(w)$ ist dann

$$\begin{aligned}\|w\|_t - \|\varphi\|_t &\leqq \|w - \varphi\|_t \leqq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|\,\|w_j - \varphi_j\|_t \\ &\leqq \Big(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|w_j - \varphi_j\|_t^2\Big)^{1/2} \\ &\leqq \varkappa\,\|w\|_t\,,\end{aligned}$$

und daher

$$\|w\|_t \leqq \frac{1}{1-\varkappa}\,\|\varphi\|_t\,.$$

Ferner ist

$$\|T\varphi\|_t = \left\|\sum_{j=1}^{k}\alpha_j T\varphi_j\right\|_t \leqq \left(\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|T\varphi_j\|_t^2\right)^{1/2}$$

$$\leqq \varkappa\,\|w\|_t \leqq \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\|\varphi\|_t = \delta\,\|\varphi\|_t\,.$$

Damit ist aber

$$|\mathrm{Re}\,(L(.\,,D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0| = |\mathrm{Re}\,(T\varphi\,,\varphi)_t| \leqq \|T\varphi\|_t\,\|\varphi\|_t \leqq \delta\,\|\varphi\|_t^2$$

für alle $\varphi \in \Lambda_2$. Nach Bedingung K ist $\dim \Lambda_2 < \infty$, und $\{\varphi_j\}$ enthält eine konvergente Teilfolge. Andrerseits hat man für $j\,,k \geqq 3\,.\ j \neq k$ wegen der Orthonormiertheit von $\{w_j\}$

$$\|\varphi_j-\varphi_k\|_t \geqq \|w_j-w_k\|_t - \|\varphi_j-w_j\|_t - \|\varphi_k-w_k\|_t$$

$$\geqq 2^{1/2} - \frac{\varkappa}{2^{j/2}} - \frac{\varkappa}{2^{k/2}} \geqq \frac{1}{2^{1/2}}\,,$$

im Widerspruch zur Konvergenz einer Teilfolge von $\{\varphi_j\}$. Folglich kann $N(T^\sim)$ nicht unendlichdimensional sein.

B. Nun beweisen wir die Existenz einer Zahl $\gamma > 0$ derart, daß

$$\text{(2.2)}\qquad \|T^\sim w\|_t \geqq \gamma\,\|w\|_t \quad \text{für alle } w \in D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$$

gilt. Man nehme als Antithese an, daß keine solche Zahl existiert. Weil $T^\sim$ wegen $\dim N(T^\sim) < \infty$ nicht der Nulloperator ist, gibt es gemäß Lemma 2.2 eine orthonormierte Folge $\{w_j\} \subset D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$ mit

$$\|T^\sim w_j\|_t \leqq \frac{\varkappa}{2^{1+j/2}}\,.$$

Weil $T^\sim$ die Abschließung von T ist, existiert zu jedem j ein $\varphi_j \in C_0^\infty(G)$ mit

$$\|w_j - \varphi_j\|_t \leqq \frac{\varkappa}{2^{j/2}} \quad \text{und} \quad \|T^\sim w_j - T\varphi_j\|_t \leqq \frac{\varkappa}{2^{1+j/2}}\,.$$

Wie in Beweisteil A erkläre man Λ_1, Λ_2 und λ. Ähnlich wie dort erhält man die Ungleichung

$$\|w\|_t \leqq \frac{1}{1-\varkappa}\|\varphi\|_t$$

sowie die Abschätzung

$$\|T\varphi\|_t \leqq \|T^\sim w\|_t + \|T\varphi - T^\sim w\|_t$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|\,\|T^\sim w_j\|_t + \sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|\,\|T^\sim w_j - T\varphi_j\|_t$$

$$\leqq 2\left(\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}\frac{\varkappa}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^j}\right)^{1/2}$$
$$\leqq \varkappa\,\|w\|_t\,.$$

Hieraus folgt weiter

$$\|T\,\varphi\|_t \;\leqq\; \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\,\|\varphi\|_t \;=\; \delta\,\|\varphi\|_t\,.$$

Damit ist für alle $\varphi \in \Lambda_2$

$$|\mathrm{Re}\,(L(.\,,D)\,\varphi\;,\;\varphi)_0| \;=\; |\mathrm{Re}\,(T\,\varphi\,,\varphi)_t| \;\leqq\; \delta\,\|\varphi\|_t^2\,.$$

Wegen Bedingung K ist $\dim \Lambda_2 < \infty$, woraus wie in A ein Widerspruch zu folgern ist.

C. Die Wertemenge $R(T^\sim)$ von $T^\sim$ ist abgeschlossen: Sei nämlich $\{T^\sim w_j\}$ mit $\{w_j\} \subset D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$ eine Cauchyfolge in $R(T^\sim)$. Nach (2.2) ist dann $\{w_j\}$ eine Cauchyfolge in $D(T^\sim)$; wegen der Abgeschlossenheit von $T^\sim$ konvergiert $\{w_j\}$ gegen ein $w \in D(T^\sim)$ und gleichzeitig $\{T^\sim w_j\}$ gegen $T^\sim w$.

Für $y \in H_0^t(G)$ gilt $(y\,,T^\sim w)_t = 0$ für alle $w \in D(T^\sim)$ genau dann, wenn $y \in N(T^*)$ ist. Also ist $N(T^*) = R(T^\sim)^\perp$ und wegen der Abgeschlossenheit von $R(T^\sim)$ auch $R(T^\sim) = R(T^\sim)^{\perp\perp} = N(T^*)^\perp$.

D. Weil nach C die Relation $D(T^*) \cap N(T^*)^\perp \subset R(T^\sim)$ gilt, gibt es zu jedem $y \in D(T^*) \cap N(T^*)^\perp$ ein $w \in D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$ mit $T^\sim w = y$. Nach (2.2) erhält man

$$\|y\|_t^2 \;=\; \|T^\sim w\|_t^2 \;=\; (T^\sim w\;,\;T^\sim w)_t \;=\; (T^*\,y\;,\;w)_t$$
$$\leqq\; \|T^*\,y\|_t\,\|w\|_t \;\leqq\; \frac{1}{\gamma}\,\|T^*\,y\|_t\,\|T^\sim w\|_t$$
$$\leqq\; \frac{1}{\gamma}\,\|T^*\,y\|_t\,\|y\|_t$$

und folglich

$$\|T^*\,y\|_t \;\geqq\; \gamma\,\|y\|_t \qquad \text{für alle } y \in D(T^*) \cap N(T^*)^\perp\,.$$

Ähnlich wie in C folgt hieraus $R(T^*) = N(T^\sim)^\perp$.

E. Sei $z \in H_0^t(G)$. Die Gleichung

$$T^*\,v \;=\; z$$

hat dann und nur dann eine Lösung $v \in H_0^t(G)$, wenn

$$(z\,,w)_t \;=\; 0 \qquad \text{für alle } w \in N(T^\sim)$$

gilt.

3. Eine verallgemeinerte Gårdingsche Ungleichung

3.1. Peter Hess hat in seiner Arbeit [7], Lemma 3.4, S. 15, auch gezeigt, daß im Falle eines beschränkten Gebietes G die Gültigkeit von Bedingung K garantiert ist, falls gilt

Bedingung GU. *Der in G erklärte Differentialoperator $L(.\,, D)$ sei stark $2t$-koerzitiv, d. h. es gebe zwei Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 \geqq 0$ derart, daß die verallgemeinerte Gårdingsche Ungleichung*

$$\operatorname{Re}(L(.\,, D)\varphi\,,\ \varphi)_0 \geqq C_1\|\varphi\|_t^2 - C_2\|\varphi\|_0^2 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G) \tag{3.1}$$

gilt.

Wir geben jetzt einen direkten Beweis für

Satz 3.1. *Sei G eine offene Menge, für die die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist* [4]). *Weiter nehme man an, daß der Differentialoperator $L(.\,, D)$ Bedingung GU erfüllt. Dann gelten die Behauptungen von Satz 2.1.*

Beweis. Nach Definition von T und $T^\sim$ folgt aus (3.1)

$$\operatorname{Re}(T^\sim w\,, w)_t \geqq C_1\|w\|_t^2 - C_2\|w\|_0^2 \quad \text{für alle } w \in D(T^\sim)\,. \tag{3.2}$$

Es gilt $\dim N(T^\sim) < \infty$. Andernfalls gäbe es eine unendliche in $H_0^t(G)$ orthonormierte Folge $\{w_j\} \subset N(T^\sim)$. Weil die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist, existiert eine in $L^2(G)$ konvergente Teilfolge $\{w_{j_\mu}\}$. Nach (3.2) ist

$$C_1\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_t^2 \leqq C_2\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_0^2 \to 0 \quad \text{für } \mu\,, \nu \to \infty\,,$$

im Widerspruch zu $\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_t = 2^{1/2}$ für $\mu \neq \nu$.

Wir zeigen dann die Existenz einer Zahl $\gamma > 0$ derart, daß

$$\|T^\sim w\|_t \geqq \gamma\|w\|_t \quad \text{für alle } w \in D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$$

gilt. Als Antithese nehmen wir an, es existiere keine solche Zahl. Es gibt also eine Folge $\{w_j\} \subset D(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp$ mit $\|w_j\|_t = 1$ und $\|T^\sim w_j\|_t \to 0$ für $j \to \infty$. Wieder enthält $\{w_j\}$ eine in $L^2(G)$ konvergente Teilfolge $\{w_{j_\mu}\}$. Wegen (3.2) ist

$$\begin{aligned} C_1\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_t^2 &\leqq \|T^\sim w_{j_\mu} - T^\sim w_{j_\nu}\|_t\,\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_t + C_2\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_0^2 \\ &\leqq 2\,(\|T^\sim w_{j_\mu}\|_t + \|T^\sim w_{j_\nu}\|_t) + C_2\|w_{j_\mu} - w_{j_\nu}\|_0^2\,, \end{aligned}$$

[4]) Dies bedeutet, daß für $H^t{}_0(G)$ der Rellichsche Auswahlsatz gilt: Aus jeder in $H^t{}_0(G)$ beschränkten Folge kann eine in $L^2(G)$ konvergente Teilfolge gewählt werden. Hinreichend dafür ist z. B. Beschränktheit der offenen Menge G. Man vergleiche Franz Rellich [22]—[23] oder etwa Agmon [1], Theorem 8.3, S. 99—101.

und für $\mu, \nu \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. Folglich gibt es ein $w \in H_0^t(G)$ derart, daß $\|w - w_{j_\mu}\|_t \to 0$. Es gilt $w \in N(T^\sim)^\perp$ und $\|w\|_t = 1$. Wegen $T^\sim w_{j_\mu} \to 0$ und wegen der Abgeschlossenheit von $T^\sim$ ist andrerseits $w \in N(T^\sim)$, also $w \in N(T^\sim) \cap N(T^\sim)^\perp = \{0\}$, im Widerspruch zu $\|w\|_t = 1$.

Wie in den Teilen C–E des Beweises von Satz 2.1 folgert man dann die übrigen Aussagen.

4. Äquivalenz der Bedingungen

4.1. Aus dem Beweis von Lemma 3.4 von Peter Hess [7], S. 15, kann man folgern: Falls für die offene Menge G die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist, folgt aus der Gültigkeit von Bedingung GU, daß Bedingung K erfüllt ist. Jetzt werden wir eine Umkehrung dieser Tatsache beweisen:

Satz 4.1. *Sei G eine offene Menge, für die die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist. Weiter nehme man an, daß der Differentialoperator $L(.\,, D)$ Bedingung K erfüllt und mit einer reellen Zahl m der Ungleichung*

$$\text{Re}\,(L(.\,, D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0 \geqq m\,\|\varphi\|_0^2 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G) \tag{4.1}$$

genügt. Dann ist Bedingung GU erfüllt.

4.2. Wir werden diesen Satz zuerst im Fall $m > 0$ beweisen und dann den Fall $m \leqq 0$ mit Hilfe des nachfolgenden Lemmas darauf zurückführen.

Lemma 4.2. *Sei G eine offene Menge, für die die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist. Weiter nehme man an, daß für den Differentialoperator $L(.\,, D)$ Bedingung K mit einem $\delta > 0$ erfüllt ist. Mit einer reellen Zahl η sei $L_1(.\,, D)$ durch*

$$L_1(x\,, D)\,\varphi(x) := L(x\,, D)\,\varphi(x) + \eta\,\varphi(x) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G)$$

erklärt. Dann gilt Bedingung K für $L_1(.\,, D)$ mit jeder positiven Zahl $\delta_1 < \delta$.

Beweis. Als Antithese nehme man an, zu einer positiven Zahl $\delta_1 < \delta$ existiere eine unendlichdimensionale lineare Menge $M_1 \subset C_0^\infty(G)$ derart, daß

$$|\text{Re}\,(L_1(.\,, D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0| \leqq \delta_1\,\|\varphi\|_t^2 \quad \text{für alle } \varphi \in M_1$$

ist. Dann gibt es eine unendliche in bezug auf das Skalarprodukt $(\ ,\ )_t$ orthonormale Folge $\{\varphi_j\} \subset M_1$. Weil $\{\varphi_j\}$ in $H_0^t(G)$ schwach gegen das Nullelement kovergiert und weil die Einbettung von $H_0^t(G)$ in $L^2(G)$ kompakt ist, gilt $\|\varphi_j\|_0 \to 0$. Somit gibt es zu jedem j ein $\nu(j)$ derart, daß

$$\|\psi_{\nu(j)}\|_0^2 \leqq \frac{\delta-\delta_1}{2^j\,(|\eta|+1)}$$

und $\nu(j+1) > \nu(j)$ gilt. Wir setzen $\varphi_j := \psi_{\nu(j)}$. Die lineare Hülle Λ von $\{\varphi_j\}$ ist unendlichdimensional. Sei

$$\varphi := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \varphi_j \in \Lambda .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi\,,\varphi)_0 &\leqq \sum_{j,l=1}^{k} |\bar{\alpha}_j|\;|\alpha_l|\;|(\varphi_j\,,\varphi_l)_0| \leqq \Big(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|\;\|\varphi_j\|_0\Big)^2 \\ &\leqq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \sum_{l=1}^{k} \|\varphi_l\|_0^2 \leqq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2\, \frac{\delta-\delta_1}{|\eta|+1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{\delta-\delta_1}{|\eta|+1}\, \|\varphi\|_t^2 .\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\,(L(.\,,D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0| &\leqq |\mathrm{Re}\,(L_1(.\,,D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0| + |\eta|\,(\varphi\,,\varphi)_0 \\ &\leqq \delta_1\,\|\varphi\|_t^2 + (\delta-\delta_1)\,\|\varphi\|_t^2 = \delta\,\|\varphi\|_t^2\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \Lambda$. Nach Bedingung K ist Λ endlichdimensional, was einen Widerspruch bedeutet.

4.3. Wir beweisen jetzt Satz 4.1.

A. Sei $m > 0$. Sei T der durch (1.1) definierte Operator. Man erkläre auf $D(T) = C_0^\infty(G)$

$$S := \frac{1}{2}\,(T+T^*) .$$

Dann gilt $D(S) = C_0^\infty(G) \subset D(S^*)$ und $S^*\varphi = S\varphi$ für alle $\varphi \in D(S)$.

Weil

$$(S\,\varphi\,,\varphi)_t = \mathrm{Re}\,(L(.\,,D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

ist, folgt aus (4.1)

$$(S\,\varphi\,,\varphi)_t \geqq m\,\|\varphi\|_0^2 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G) . \tag{4.2}$$

Sei D_0 die Menge aller solchen Elemente w aus $H_0^t(G)$, für die je eine Folge $\{\psi_\mu\} \subset C_0^\infty(G)$ mit den Eigenschaften $\|w-\psi_\mu\|_t \to 0$ und $(S\,(\psi_\mu-\psi_\nu)\,,\psi_\mu-\psi_\nu)_t \to 0$ für $\mu\,,\nu \to \infty$ existiert. Die Einschränkung S_F von S^* auf $D(S_F) := D(S^*) \cap D_0$ ist eine positive selbstadjungierte Fortsetzung von S (die Friedrichssche Fortsetzung; man vergleiche

z. B. Riesz – Sz.-Nagy [24], S. 328 – 333). Insbesondere gibt es zu jedem $w \in D(S_F)$ eine Folge $\{\varphi_\mu\} \subset C_0^\infty(G)$ derart, daß

$$(S_F\, w\,, w)_t \;=\; \lim_{\mu\to\infty} (S\, \varphi_\mu\,, \varphi_\mu)_t \tag{4.3}$$

ist. Wegen (4.2) und (4.3) gilt

$$(S_F\, w\,, w)_t \;\geqq\; m\, \|w\|_0^2 \qquad \text{für alle } \; w \in D(S_F)\,,$$

und folglich ist $N(S_F) = 0$.

Wir zeigen die Existenz einer Zahl $\gamma > 0$ derart, daß

$$\|S_F\, w\|_t \;\geqq\; \gamma\, \|w\|_t \qquad \text{für alle } \; w \in D(S_F) \tag{4.4}$$

gilt. Als Antithese nehmen wir an, daß es keine solche Zahl gibt. Sei $\varkappa$ eine beliebige positive Zahl, die wir später festsetzen werden. Nach Lemma 2.2 existiert eine unendliche in bezug auf das Skalarprodukt $(\ ,\ )_t$ orthonormierte Folge $\{w_j\} \subset D(S_F)$ mit $\|S_F\, w_j\|_t \leqq \varkappa/2^{j+1}$. Nach der Definition von S_F und nach (4.3) gibt es zu jedem j ein $\varphi_j \in C_0^\infty(G)$ derart, daß

$$\|w_j - \varphi_j\|_t \;\leqq\; \frac{\varkappa}{2^{j/2}}$$

und

$$|(S_F\, w_j\,, w_j)_t - (S\, \varphi_j\,, \varphi_j)_t| \;\leqq\; \frac{\varkappa}{2^{j+1}} \tag{4.5}$$

ist. Es gilt

$$|(S_F\, w_j\,, w_j)_t| \;\leqq\; \|S_F\, w_j\|_t\, \|w_j\|_t \;\leqq\; \frac{\varkappa}{2^{j+1}}$$

und daher nach (4.5)

$$|(S\, \varphi_j\,, \varphi_j)_t| \;\leqq\; \frac{\varkappa}{2^j}\,.$$

Weil S positiv ist, folgt hieraus nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|(S\, \varphi_j\,, \varphi_l)_t|^2 \;\leqq\; (S\, \varphi_j\,, \varphi_j)_t\, (S\, \varphi_l\,, \varphi_l)_t \;\;\leqq\; \frac{\varkappa^2}{2^j\, 2^l}\,. \tag{4.6}$$

Sei Λ_1 die lineare Hülle von $\{w_j\}$ und Λ_2 die lineare Hülle von $\{\varphi_j\}$. Wie in 2.3.A erklären wir die Abbildung $\lambda:\ \Lambda_1 \to \Lambda_2$. Ist

$$w \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, w_j \;\in\; \Lambda_1 \qquad \text{und} \qquad \varphi \;:=\; \lambda(w) \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \varphi_j\,,$$

so hat man wieder

$$\|w\|_t \leqq \frac{1}{1-\varkappa} \|\varphi\|_t . \tag{4.7}$$

Weiter ist nach (4.6) und (4.7)

$$\begin{aligned} |(S\varphi, \varphi)_t| &= \left| \sum_{j,l=1}^{k} \bar{\alpha}_j \alpha_l (S\varphi_j, \varphi_l)_t \right| \\ &\leqq \varkappa \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{|\alpha_j|}{2^{j/2}} \right)^2 \leqq \varkappa \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \\ &= \varkappa \|w\|_t^2 = \frac{\varkappa}{(1-\varkappa)^2} \|\varphi\|_t^2 . \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir die Zahl $\varkappa > 0$ derart, daß

$$\frac{\varkappa}{(1-\varkappa)^2} = \delta$$

gilt. Somit hat man

$$|(S\varphi, \varphi)_t| \leqq \delta \|\varphi\|_t^2 \quad \text{für alle } \varphi \in \Lambda_2 .$$

Nach Bedingung K ist Λ_2 endlichdimensional, woraus sich wie in 2.3.A ein Widerspruch zur Antithese ergibt.

Daher ist (man vergleiche 2.3.C) insbesondere die Wertemenge $R(S_F)$ abgeschlossen und $= N(S_F)^\perp = H_0^t(G)$. Zu $\varphi \in C_0^\infty(G)$ existiert genau ein $v \in D(S_F)$ mit $S_F v = \varphi$. Es ist nach (4.4)

$$|(S_F v, v)_t| \leqq \|S_F v\|_t \|v\|_t \leqq \frac{1}{\gamma} \|S_F v\|_t^2 = \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|_t^2 .$$

Folglich erhält man wegen der Positivität von S_F

$$\|\varphi\|_t^4 = (S_F v, \varphi)_t^2 \leqq (S_F v, v)_t (S_F \varphi, \varphi)_t \leqq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|_t^2 (S\varphi, \varphi)_t .$$

Gemäß der Definition von S ist daher

$$\mathrm{Re}\,(L(.\,, D)\varphi, \varphi)_0 = (S\varphi, \varphi)_t \geqq \gamma \|\varphi\|_t^2 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G) ,$$

und somit gilt Bedingung GU mit $C_1 := \gamma > 0$ und $C_2 := 0$.

B. Es bleibt der Fall $m \leqq 0$ zu behandeln. Wir setzen für $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$L_1(.\,, D)\varphi := L(.\,, D)\varphi + (|m|+1)\varphi .$$

Dann ist

$$\mathrm{Re}\,(L_1(.\,, D)\varphi, \varphi)_0 \geqq \|\varphi\|_t^2 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G) .$$

Nach Lemma 4.2 ist Bedingung K für $L_1(.\,, D)$ mit jeder Zahl δ_1,

$0 < \delta_1 < \delta$, erfüllt. Nach Teil A des Beweises folgt dann Existenz einer positiven Zahl γ so, daß

$$\operatorname{Re}\,(L_1(\,.\,, D)\,\varphi\;,\;\varphi)_0 \;\geqq\; \gamma\,\|\varphi\|_t^2 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G)$$

ist. Hieraus folgt

$$\operatorname{Re}\,(L(\,.\,, D)\,\varphi\;,\;\varphi)_0 \;\geqq\; C_1\,\|\varphi\|_t^2 - C_2\,\|\varphi\|_0^2 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G)$$

mit $C_1 := \gamma$ und $C_2 := |m| + 1$.

5. Zur algebraischen Charakterisierung

5.1. Wir haben bislang die stark $2t$-koerzitiven Differentialoperatoren $L(\,.\,, D)$ durch Abbildungseigenschaften charakterisiert. Es entsteht noch die Frage nach Bedingungen für das entsprechende Polynom $L(\,.\,, \xi)$ von $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, deren Gültigkeit das Bestehen von Bedingung GU garantiert.

Im folgenden werden wir nur den linearen partiellen Differentialoperator

$$L(D) \;:=\; \sum_{|\sigma| \leqq r} a_\sigma\, D^\sigma$$

mit konstanten komplexen Koeffizienten a_σ betrachten.

In unserer früheren Arbeit [16], Satz 1.2, S. 5–8, haben wir gezeigt, daß im Falle $G = \boldsymbol{R}^n$ der Differentialoperator $L(D)$ der verallgemeinerten Gårdingschen Ungleichung

$$\operatorname{Re}\,(L(D)\,\varphi\,, \varphi)_0 \;\geqq\; C_1\,\|\varphi\|_t^2 - C_2\,\|\varphi\|_0^2 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G) \tag{5.1}$$

mit Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 \geqq 0$ dann und nur dann genügt, wenn zu dem entsprechenden Polynom $L(\xi)$ von $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ zwei Konstanten $E > 0$ und $R \geqq 0$ derart existieren, daß

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{Re}}(\xi) \;:=\; \operatorname{Re} L(\xi) \;&=\; \operatorname{Re} \sum_{|\sigma| \leqq r} a_\sigma\, \xi^\sigma \\ &\geqq\; E\,|\xi|^{2t} \qquad \text{für alle } \xi \in \boldsymbol{R}^n \text{ mit } |\xi| \geqq R \end{aligned} \tag{5.2}$$

ist.

Sei jetzt G eine beschränkte offene Menge in $\boldsymbol{R}^n$. Auch in diesem Fall ist Bedingung (5.2) hinreichend für das Bestehen der verallgemeinerten Gårdingschen Ungleichung (5.1). Sogar der Beweisgang dieser Tatsache bleibt im wesentlichen unverändert (man vergleiche [16], Satz 1.2, Beweisteil A, S. 6–7). Diesmal können die Verfasser nichts über die Notwendigkeit von (5.2) behaupten.

5.2. Um Kriterien anderer Art im Falle einer beschränkten offenen Menge G stellen zu können führen wir den Differentialoperator

$$Q(D) := \sum_{|\tau| \leqq t} D^{2\tau}$$

ein.

Falls die verallgemeinerte Gårdingsche Ungleichung (5.1) gilt, so folgt für $\psi \in C_0^\infty(G)$ und für $\varphi := D^\tau \psi$ mit $|\tau| \leqq t$

$$\text{(5.3)} \qquad \operatorname{Re}\,(L(D)\,\psi\,,\,D^{2\tau}\,\psi)_0 \;\geqq\; C_1\,\|D^\tau\,\psi\|_t^2 - C_2\,\|D^\tau\,\psi\|_0^2\,.$$

Da

$$\|\varphi\|_t^2 \;=\; (Q(D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(G)$$

ist, folgt aus (5.3) durch Summation über alle τ mit $|\tau| \leqq t$

$$\operatorname{Re}\,(L(D)\,\psi\,,\,Q(D)\,\psi)_0 \;\geqq\; C_1\,\|Q(D)\,\psi\|_0^2 - C_2\,(\psi\,,\,Q(D)\,\psi)_0\,.$$

Vermöge der Schwarzschen Ungleichung und wegen $2\,a\,b \leqq \varepsilon\,a^2 + \varepsilon^{-1}\,b^2$ $(a\,,b\,,\varepsilon \in \boldsymbol{R}\;,\;\varepsilon > 0)$ folgt für $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$

$$C_1\,\|Q(D)\,\psi\|_0^2$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2}\,\|Q(D)\,\psi\|_0^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon}\,\|L_{\mathrm{Re}}(D)\,\psi\|_0^2 + C_2\,\frac{\eta}{2}\,\|Q(D)\,\psi\|_0^2 + C_2\,\frac{1}{2\,\eta}\,\|\psi\|_0^2\,.$$

Mit $\varepsilon := C_1/2$ und $\eta := C_1/(2\,C_2)$ folgt

$$\text{(5.4)} \qquad \frac{C_1}{2}\,\|Q(D)\,\psi\|_0^2 \;\leqq\; \frac{1}{C_1}\,\|L_{\mathrm{Re}}(D)\,\psi\|_0^2 + \frac{C_2^2}{C_1}\,\|\psi\|_0^2\,.$$

Für jedes Polynom $P(\xi)$ von $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ vom Grade s erklären wir die Funktion

$$P^{\sim}(\xi) := \Big(\sum_{|\sigma| \leqq s} |D^\sigma\,P(\xi)|^2\Big)^{1/2}.$$

Nach einem Resultat von Lars Hörmander [9], Theorem 2.2, S. 178 – 180, folgt aus (5.4), daß mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ die Ungleichung

$$\text{(5.5)} \qquad Q\ \,(\xi) \;\leqq\; C\,L_{\mathrm{Re}}^{\sim}(\xi) \qquad \text{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

gilt. Somit ist (5.5) eine notwendige Bedingung für das Bestehen der verallgemeinerten Gårdingschen Ungleichung (5.1).

Aus (5.5) folgt insbesondere $2\,t \leqq r$.

Ist umgekehrt (5.5) erfüllt und ist zusätzlich

$$\text{(5.6)} \qquad \operatorname{Re} L(\xi) \;\geqq\; 0 \qquad \text{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n\,,$$

so folgt ebenfalls nach Hörmander [10], Theorem 3.2.6, S. 71, die Gültigkeit der verallgemeinerten Gårdingschen Ungleichung (5.1). Es lassen sich aber leicht Beispiele von Polynomen $L(\xi)$ konstruieren, die Abschätzung (5.5) erfüllen und für die die verallgemeinerte Gårdingsche Ungleichung (5.1) gilt, bei denen jedoch Bedingung (5.6) verletzt ist, ja sogar die Menge $\{ \xi \in \boldsymbol{R}^n \mid \operatorname{Re} L(\xi) < 0 \}$ unbeschränkt ausfällt.

Es ist den Verfassern bisher nicht gelungen, eine der verallgemeinerten Gårdingschen Ungleichung (5.1) völlig äquivalente Charakterisierung vermöge der Eigenschaften des Polynoms $L(\xi)$ anzugeben.

Literatur

[1] AGMON, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. - Van Nostrand Mathematical Studies 2. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey - Toronto - New York - London, 1965.

[2] BROWDER, F. E.: A remark on the Dirichlet problem for non-elliptic self-adjoint partial differential operators. - Rend. Circ. Mat. Palermo (II) 6, 1957, 249—253.

[3] —»— On the Dirichlet problem for linear non-elliptic partial differential equations, II. - Rend. Circ. Mat. Palermo (II) 7, 1958, 303—308.

[4] GRUBB, GERD : Les problèmes aux limites généraux d'un opérateur elliptique, provenant de la théorie variationnelle. - Bull. Sci. Math. (II) 94, 1970, 113—157.

[5] —»— On coerciveness and semiboundedness of general boundary problems. - Israel J. Math. 10, 1971, 32—95.

[6] —»— Properties of normal boundary problems for elliptic even-order systems. - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (IV) 1, 1974, 1—61.

[7] HESS, P.: Über das verallgemeinerte Dirichletproblem für lineare partielle Differentialgleichungen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 434, 1969, 1—28.

[8] HILDEBRANDT, S.: Rand- und Eigenwertaufgaben bei stark elliptischen Systemen linearer Differentialgleichungen. - Math. Ann. 148, 1962, 411—429.

[9] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. - Acta Math. 94, 1955, 161—248.

[10] —»— Linear partial differential operators. - Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1963.

[11] LITTMAN, W.: Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations. - Comm. Pure Appl. Math. 11, 1958, 145—151.

[12] LOUHIVAARA, I. S.: Über das erste Randwertproblem für die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + q\,u + f = 0$. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 183, 1954, 1—33.

[13] —»— Über das zweite und dritte Randwertproblem für die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + q\,u + f = 0$. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 203, 1955, 1—14. Erschienen auch im Werke: Commentationes in honorem Rolf Herman Nevanlinna die natali eius sexagesimo ediderunt amici et discipuli, Helsinki, 1955.

[14] —»— Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Rend. Circ. Mat. Palermo (II) 5, 1956, 260—274.

[15] LOUHIVAARA, I. S.: Über die neuere Entwicklung der Theorie der linearen Räume mit indefiniten Bilinearformen. - Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna. Vorträge, gehalten anläßlich des Zweiten Rolf Nevanlinna -Kolloquiums in Zürich vom 4.—6. November 1965. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966, 66—81.

[16] LOUHIVAARA, I. S., und C. G. SIMADER: Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 513, 1972, 1—22.

[17] NEVANLINNA, R.: Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 113, 1952, 1—9.

[18] —»— Über metrische lineare Räume. III. Theorie der Orthogonalsysteme. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 115, 1952, 1—27.

[19] —»— Erweiterung der Theorie des Hilbertschen Raumes. - Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Supplementband tillägnat Marcel Riesz. Tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz, 1952, 160—168.

[20] —»— Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unterräume. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 163, 1954, 1—16.

[21] —»— Über metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 222, 1956, 1—6.

[22] RELLICH, F.: Ein Satz über mittlere Konvergenz. - Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1930, 30—35.

[23] —»— Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren. - Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, January 8, 1948. Interscience Publishers, Inc., New York, 1948, 329—344.

[24] RIESZ, F., und B. SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionnelle. - Académie des Sciences de Hongrie, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
Sammonkatu 6
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Universität Bayreuth
Fachbereich Mathematik und Physik
Opernstraße 22
D 8580 Bayreuth
Deutschland

Eingegangen am 20. September 1975