Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 4, 1978/1979, 259—265

KOEFFIZIENTENABSCHÄTZUNGEN FÜR FUNKTIONEN, DEREN ERSTE ABLEITUNG BESCHRÄNKTES ARGUMENT HAT

KARL DOPPEL und LUTZ VOLKMANN

Herrn Professor Dr. Albert Pfluger in Verehrung gewidmet

1. Einleitung und Ergebnisse. Viele im offenen Einheitskreis $|z|<1$ analytische Funktionen f besitzen eine Darstellung

$$\log f'(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)\, d\mu(t). \tag{1}$$

Ist μ etwa eine Treppenfunktion mit endlich vielen Sprüngen, so stellt (1) die bekannte Schwarz—Christoffelsche Formel dar. Im Fall, daß μ eine monoton wachsende Funktion mit $\mu(2\pi)-\mu(0)=2\pi$ ist, erklärt (1) eine konvexe Funktion. Gilt schließlich für μ

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2\pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leqq k\pi$$

mit einer reellen Zahl $k\geqq 2$, so wird durch (1) gerade eine Funktion f beschränkter Randdrehung aus der Klasse V_k definiert (man vergleiche dazu [6] und [7]).

Integriert man (1) partiell, so erhält man

$$\log f'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(t)\, d\log(1-e^{-it}z). \tag{2}$$

Wie aus dieser Form ersichtlich ist, ergibt sich die Möglichkeit, allgemeinere Funktionen μ als in der Darstellung (1) zuzulassen. Es sei $\varkappa>0$ vorgegeben. Zu jeder reellen Funktion μ, die den Bedingungen

$$\mu\in L^\infty[0, 2\pi], \tag{3a}$$

$$\int_0^{2\pi} \mu(t)\, dt = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqq t\leqq 2\pi} |\mu(t)| \leqq \pi\varkappa \tag{3b}$$

genügt, wird durch (2) eine im offenen Einheitskreis $|z|<1$ analytische Funktion f der Gestalt

$$f(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

doi:10.5186/aasfm.1978-79.0403

mit der Eigenschaft

$$|\arg f'(z)| \leqq \pi\varkappa \quad (|z| < 1) \tag{4a}$$

erklärt. Umgekehrt läßt sich jede Funktion (4) mit der Eigenschaft (4a) als ein Lebesgue—Stieltjessches Integral (2) mit einer Funktion μ, die die Bedingungen (3a) und (3b) erfüllt, schreiben (man vergleiche [3]). Die Klasse dieser Funktionen f wird im folgenden mit $H_\varkappa$ bezeichnet.

Bekanntlich sind für die konvexen Funktionen (man vergleiche [4], S. 172, oder [9], S. 46) sowie für die Funktionen beschränkter Randdrehung (man vergleiche [1], [2], [5] und [10], S. 26) Koeffizientenabschätzungen gegeben worden. In dieser Note werden nun Abschätzungen für die Koeffizienten der Funktionen f der Klasse $H_\varkappa$ hergeleitet, wobei die Existenz von maximalen Koeffizienten $|a_n(f)|$ in dieser Klasse durch folgende Überlegung gesichert ist:

In [3] wurde für alle f aus $H_\varkappa$ gezeigt:

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{2\varkappa} \leqq |f'(z)| \leqq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\varkappa}. \tag{5}$$

Daraus folgt nun wegen

$$|f(z)| \leqq \int_0^z |f'(z)|\,|dz|,$$

daß $H_\varkappa$ eine lokal gleichmäßig beschränkte und daher nach dem Satz von Montel eine normale Familie bildet. Ist nun (f_n) eine Folge von Funktionen aus $H_\varkappa$ mit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, so folgt $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$ und daher $f(0)=0$ und $f'(0)=1$. Aus (5) ergibt sich $f'(z) \neq 0$ und weiter $|\arg f'(z)| \leqq \pi\varkappa$, womit $H_\varkappa$ eine kompakte Familie ist (man vergleiche [8], § 14).

In der vorliegenden Note werden für die Koeffizienten der Funktionen f aus $H_\varkappa$ die scharfen Abschätzungen

$$|a_n| \leqq \frac{4\varkappa}{n} \quad \text{für} \quad \varkappa \leqq \frac{1}{2} \tag{6a}$$

$$|a_n| \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2\varkappa}{n-1-k} \binom{2\varkappa+k-1}{k} \quad \text{für} \quad \varkappa > \frac{1}{2} \tag{6b}$$

bewiesen.

Die Verfasser möchten Herrn I. S. Louhivaara für wertvolle Hinweise und Bemerkungen danken.

2. Der Fall $\varkappa \leqq 1/2$. Für die folgenden Untersuchungen wird die vorher angegebene geometrische Charakterisierung der Funktionen aus $H_\varkappa$ zugrunde gelegt, d. h. wir betrachten für $\varkappa > 0$ die Menge der im offenen Einheitskreis $|z| < 1$ lokal schlichten Funktionen f der Gestalt

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1) \tag{4}$$

mit der Eigenschaft

$$|\arg f'(z)| \leqq \pi\varkappa \quad (|z| < 1). \tag{4a}$$

Satz 1. *Ist f aus $H_\varkappa$ mit $\varkappa \leqq 1/2$, so gilt für alle $n \geqq 2$*

(6a) $$|a_n| \leqq \frac{4\varkappa}{n}.$$

Beweis. Für eine feste natürliche Zahl n setze man

(7) $$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f'(z e^{2\pi i \nu/n}) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_{j+1} z^j \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i j \nu/n} \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (n\nu+1) a_{n\nu+1} z^{n\nu} \\ &= 1 + (n+1) a_{n+1} z^n + \dots . \end{aligned}$$

Wegen (4a) liegen die n Punkte $\zeta_\nu = f'(z e^{2\pi i \nu/n})$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ im Winkelraum $|\arg z| \leqq \pi\varkappa$. Da nach Voraussetzung $\varkappa \leqq 1/2$ ist, liegt auch das arithmetische Mittel der Punkte ζ_ν im Winkelraum $|\arg z| \leqq \pi\varkappa$, und daher gilt wegen (7)

(8) $$|\arg h(z)| \leqq \pi\varkappa$$

für alle $|z| < 1$.

Man setze nun

$$g(z) = z \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Dann folgt wegen (7)

$$g(z) = n(n+1) a_{n+1} z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k$$

und weiter $(z = r e^{i\theta})$

(9) $$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)$$

mit

(9a) $$b_n = n(n+1) a_{n+1}.$$

Multipliziert man (9) mit $\cos n\theta$ bzw. $\sin n\theta$ und integriert danach gliedweise, so erhält man

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r e^{i\theta}) \cos n\theta \, d\theta$$

bzw.

$$i b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r e^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta .$$

Wegen $b_n = \operatorname{Re} b_n - i \operatorname{Re}(i b_n)$ folgt daraus

(10) $$b_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{g(r e^{i\theta})\} e^{-in\theta} \, d\theta .$$

Beachtet man

$$\operatorname{Re}\left\{re^{i\theta}\frac{h'(re^{i\theta})}{h(re^{i\theta})}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\arg h(re^{i\theta}),$$

so ergeben (9) und (10)

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg h(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\\&=\frac{in}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\arg h(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

Setzt man $-\arg b_n=\beta$, so folgt daraus

$$\begin{aligned}|b_n|=b_ne^{i\beta}&=\frac{in}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\arg h(re^{i\theta})e^{i(\beta-n\theta)}\,d\theta\\&=\frac{-n}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\arg h(re^{i\theta})\sin(\beta-n\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (8)

$$|b_n|\leqq\frac{n}{r^n}\varkappa\int_0^{2\pi}|\sin(\beta-n\theta)|\,d\theta\leqq\frac{4n\varkappa}{r^n}.$$

Beachtet man (9a), so folgt schließlich mit $r\to1$

$$|n(n+1)a_{n+1}|=|b_n|\leqq 4n\varkappa,$$

also

$$|a_{n+1}|\leqq\frac{4\varkappa}{n+1},$$

womit (6a) bewiesen ist.

3. Der Fall $\varkappa\geqq1/2$. Im Fall $\varkappa\geqq1/2$ gelten folgende Koeffizientenabschätzungen.

Satz 2. *Ist* f *aus* $H_\varkappa$ *mit* $\varkappa\geqq1/2$, *so gilt für alle* $n\geqq2$

$$|a_n|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2\varkappa}{n-1-k}\binom{2\varkappa+k-1}{k}. \tag{6b}$$

Beweis. Für beliebiges f aus $H_\varkappa$ gilt

$$|\arg f'(z)|\leqq\pi\varkappa\qquad(|z|<1)$$

und somit

$$\left|\arg\left(f'(z)\right)^{1/(2\varkappa)}\right|=\frac{1}{2\varkappa}|\arg f'(z)|\leqq\frac{\pi}{2}\qquad(|z|<1).$$

Daher ist die Funktion p,

$$p(z)=\left(f'(z)\right)^{1/(2\varkappa)}\qquad(|z|<1),$$

eine im offenen Einheitskreis analytische Funktion mit positivem Realteil. Da p durch die Funktion q,

$$q(z)=\frac{1+z}{1-z}\qquad(|z|<1),$$

subordiniert wird (man vergleiche [9], S. 36) folgt nach einem Theorem von Brannan, Clunie und Kirwan (man vergleiche [2], S. 8, oder [10], S. 17), daß für jedes reelles $\alpha \geqq 1$ die Koeffizienten von p^α durch die entsprechenden Koeffizienten von q^α dominiert werden. Beachtet man

$$(11)\qquad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\varkappa} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{2\varkappa}{n-k}\binom{2\varkappa+k-1}{k}\right\} z^n \qquad (|z|<1)$$

und

$$(p(z))^{2\varkappa} = f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad (|z|<1),$$

so folgt wegen $2\varkappa \geqq 1$

$$n|a_n| \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2\varkappa}{n-1-k}\binom{2\varkappa+k-1}{k},$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

4. Die Schärfe der Abschätzungen. Im Fall $\varkappa \geqq 1/2$ leistet die Funktion $f_{\varkappa,t}$, t beliebig reell

$$(12)\qquad f_{\varkappa,t}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{e^{-i(n-1)t}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2\varkappa}{n-1-k}\binom{2\varkappa+k-1}{k}\right\} z^n$$

das Gewünschte (man vergleiche [3]).

Im Fall $0 < \varkappa \leqq 1/2$ betrachte man für $n \geqq 2$ die Funktionen $f_{n,\varkappa}$,

$$f_{n,\varkappa}(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\zeta^{n-1}}{1-\zeta^{n-1}}\right)^{2\varkappa} d\zeta \qquad (|z|<1).$$

Wegen

$$\left|\arg\left\{\frac{1+z^{n-1}}{1-z^{n-1}}\right\}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

gilt offensichtlich

$$|\arg f'_{n,\varkappa}(z)| \leqq \pi\varkappa$$

und folglich gehört $f_{n,\varkappa}$ zu $H_\varkappa$. Andererseits findet man sofort

$$f_{n,\varkappa}(z) = z + \frac{4\varkappa}{n} z^n + \ldots \qquad (|z|<1),$$

so daß für jedes $n \geqq 2$ jeweils der n-te Koeffizient der Funktion $f_{n,\varkappa}$ bezüglich Satz 1 extremal ist.[1])

[1]) Im Gegensatz zu den Funktionen mit beschränkter Randdrehung gilt für die in dieser Note betrachtete Funktionenklasse folgender Sachverhalt:

Ist f aus $H_\varkappa$ und $\varkappa \leqq 1$, so gelten für die n-ten Koeffizienten $a_n(f)$ die Abschätzungen

$$|a_n(f)| \leqq n, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

aber die Funktionen $f_{3,\varkappa}$,

$$f_{3,\varkappa}(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\right)^{2\varkappa} d\zeta \qquad (|z|<1)$$

sind für alle $\varkappa > 3/4$ nicht schlicht (man vergleiche [9], Theorem 1.5).

5. Ein Verzerrungssatz. In [3] wurde für alle f aus $H_\varkappa$ und alle $|z|<1$ bewiesen:

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{2\varkappa} \leqq |f'(z)| \leqq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\varkappa} \tag{5}$$

und

$$|f''(z)| \leqq 2\pi\varkappa \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\varkappa} \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Da für die in (12) angegebene Funktion $f_{\varkappa,t}$ gilt:

$$f'_{\varkappa,t}(z) = \left(\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\right)^{2\varkappa}, \tag{13}$$

liefert (5) die scharfen Schranken für die Verzerrung von f (man vergleiche [3]). Im folgenden Satz werden für die m-ten Ableitungen $(m \geqq 2)$ von f scharfe (obere) Schranken angegeben, falls $\varkappa \geqq 1/2$ ist.

Satz 3. *Ist f aus $H_\varkappa$ mit $\varkappa \geqq 1/2$, so gilt für alle $m \geqq 2$ und alle $|z|<1$*

$$|f^{(m)}(z)| \leqq \frac{d^{m-1}}{d|z|^{m-1}} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\varkappa}. \tag{14}$$

Beweis. Setzt man

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \tag{15}$$

so sind alle A_n reell und positiv (man vergleiche (11)). Setzt man

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \tag{16}$$

so gilt wegen Satz 2 für alle n

$$|\alpha_n| \leqq A_n. \tag{17}$$

Für $m \geqq 2$ folgt aus (15)

$$\frac{d^{m-1}}{d|z|^{m-1}} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\varkappa} = \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+2) A_n |z|^{n-m+1} \tag{18}$$

und aus (16) und (17)

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(z)| &= \left| \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+2)\alpha_n z^{n-m+1} \right| \\ &\leqq \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+2)|\alpha_n|\,|z|^{n-m+1} \\ &\leqq \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+2) A_n |z|^{n-m+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt sofort die gewünschte Abschätzung (14).

Bemerkungen. Die in (13) angegebene Funktion $f'_{\varkappa,0}$ definiert durch

$$f'_{\varkappa,0}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\varkappa}$$

liefert für $z=|z|$ in (14) das Gleichheitszeichen, womit diese Ungleichung scharf ist.

Für den Fall $\varkappa<1/2$ bleibt die Frage nach der scharfen Abschätzung der m-ten Ableitung von f $(m\geqq 2)$ offen.

Literatur

[1] Aharonov, D., und S. Friedland: On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 524, 1973, 1—13.

[2] Brannan, D. A., J. G. Clunie, und W. E. Kirwan: On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 523, 1973, 1—18.

[3] Doppel, K.: Über lokal schlichte Funktionen, deren erste Ableitung beschränktes Argument hat. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 3, 1977, 317—325.

[4] Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. - Hochschulbücher für Mathematik 31. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

[5] Lehto, O.: On the distortion of conformal mappings with bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.-Phys. 124, 1952, 1—14.

[6] Löwner, K.: Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. - Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physikalische Klasse 69, 1917, 89—106.

[7] Paatero, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 33:9, 1931, 1—78.

[8] Pfluger, A.: Lectures on conformal mapping. - [Vorlesungsausarbeitung.] Indiana University, Department of Mathematics, Bloomington, 1969.

[9] Pommerenke, Chr.: Univalent functions. - Mathematische Lehrbücher 25. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1975.

[10] Schober, G.: Univalent functions - Selected topics. - Lecture Notes in Mathematics 478, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975.

Freie Universität Berlin
I. Mathematisches Institut
Hüttenweg 9
D 1000 Berlin 33

Eingegangen am 17. November 1978