Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 6, 1981, 15—28

ÜBER DAS VERHALTEN DER LÖSUNGEN DER MAXWELLSCHEN RANDWERTAUFGABE IN EINIGEN NICHTGLATTEN GEBIETEN

JUKKA SARANEN

Sei $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ ein Gebiet. Die zeitunabhängige Maxwellsche Randwertaufgabe für isotrope homogene Medien lautet

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{cases} \nabla \times E - i\omega\mu H = J, \\ \nabla \times H + i\omega\varepsilon E = K, \\ n \times E|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$. Dabei sind ε und μ positive Materialkonstanten, und ω ist eine komplexe Zahl. Führt man in (0.1) die Substitutionen $H = \sqrt{\varepsilon} H'$, $E = \sqrt{\mu} E'$, $\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega'$ ein, so ergibt sich

$$\begin{cases} \nabla \times E' - i\omega' H' = \mu^{-1/2} J, \\ \nabla \times H' + i\omega' E' = \varepsilon^{-1/2} K, \\ n \times E'|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Deswegen setzen wir im folgenden o. B. d. A. $\varepsilon = \mu = 1$ voraus. Bei der Behandlung von (0.1) mit Hilbertraum-Methoden ist es üblich die Räume $R(\Omega) = \{E \in L^2(\Omega)^3 | \nabla \times E \in L^2(\Omega)^3\}$, $D(\Omega) = \{E \in L^2(\Omega)^3 | \operatorname{div} E \in L^2(\Omega)\}$, $R^0(\Omega) = \{E \in R(\Omega) | (\nabla \times E | F) = (E | \nabla \times F) \,\forall F \in R(\Omega)\}$ zu benutzen. Die schwache Form von (0.1) wird $(\varepsilon = \mu = 1)$

$$\text{(0.2)} \qquad \begin{cases} \nabla \times E - i\omega H = J, & E \in R^0(\Omega), \quad H \in R(\Omega), \\ \nabla \times H + i\omega E = K, & J, K \in L^2(\Omega)^3. \end{cases}$$

Die Existenztheorie der Aufgabe (0.2) ist weit entwickelt worden [5], [6], [16], [17], [18]. Für eine umfangreiche Klasse von Gebieten hat man die Fredholmsche Alternative bewiesen. Dasselbe gilt auch für anisotrope inhomogene Medien [16], [17]. Von den qualitativen Eigenschaften der Lösungen ist im wesentlichen folgendes bekannt. Falls die rechte Seite die zusätzliche Regularität $J \in R(\Omega)$, $K \in D(\Omega)$, $\operatorname{div} K \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt, kann man das Feld H aus (0.2) eliminieren $(\omega \neq 0)$, und man erhält die elliptische Gleichung

$$\text{(0.3)} \qquad -\Delta E - \omega^2 E = F, \quad E \in R^0(\Omega) \cap D(\Omega), \quad \operatorname{div} E \in H_0^1(\Omega)$$

doi:10.5186/aasfm.1981.0620

mit $F=\nabla\times J+i\omega K+i\omega^{-1}\nabla\operatorname{div} K$. Nach einem bekannten Verfahren [1] schließt man dadurch in glatten Gebieten auf die übliche Regularität $E\in H^2(\Omega)^3$ mit

$$\|E\|_2 \leqq C(\|E\|+\|F\|)$$

[8], [9]. In nichtglatten Fällen ist die Situation anders. Die Lösungen von (0.3) brauchen nicht einmal im Raum $H^1(\Omega)^3$ liegen [11], [12], [14]. In [12] haben wir das Verhalten der Lösungen in Kegelspitzen untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird diese Untersuchung weiter geführt. Wenn man nämlich z. B. Anwendungen auf die Methode der finiten Elemente betrachtet, ist das in [12] gewonnene Ergebnis nicht hinreichend. Sei x_0 ein singulärer Randpunkt und sei $U=\{x_0+r\omega\,|\,\omega\in G, 0<r<R\}$, $G\subset S=\{x\,|\,|x|=1\}$ eine Umgebung des Punktes x_0 in Ω. Unter einigen Bedingungen an das sphärische Gebiet G leitet man für die Lösungen E in U eine Zerlegung $E=S+W$ in einen singulären Teil S und einen anderen $W\in H^2(U)^3$ her. Der singuläre Teil S ist vom Typ

$$S=\sum_{n=1}^{p}\alpha_n|x-x_0|^{\xi_n}F_n(\omega).$$

Die Konstanten ξ_n hängen nur von den Eigenwerten der Dirichletschen und Neumannschen Aufgabe für den Laplace—Beltramischen Operator auf G ab. Die Felder F_n stellt man mit Hilfe der Eigenfunktionen dieser Probleme dar. Die Konstanten α_n und das Feld W erfüllen die Abschätzung

$$\|W\|_{2,U}+\left(\sum_{n=1}^{p}|\alpha_n|^2\right)^{1/2} \leqq C(\|E\|+\|F\|+\|\operatorname{div} F\|_1).$$

Derartige Zerlegungen sind besonders wichtig, wenn man die Lösungen mit finiten Elementen in nichtglatten Gebieten zu approximieren versucht [15]. In [12] konnten wir diese Zerlegung nicht erreichen. Hier wird sie dadurch ermöglicht, daß wir mit einer Methode von Kondrat'ev [4] die Koeffizienten einer Entwicklung für die Lösung günstig zerlegen. Der ebene Fall mit einer Anwendung auf finite Elemente wurde in [13] behandelt.

1. Entwicklung für die Lösung

Wir betrachten das Verhalten der Lösung in der Nähe eines Punktes $x_0\in\Gamma$, wo der Rand nicht glatt ist. Wir wollen die Lösung in einer Umgebung von x_0 günstig entwickeln. Dafür fordert man, daß x_0 eine kegelförmige Umgebung in Ω besitzt. Sei $B(x_0, R)=\{x\,|\,|x-x_0|<R\}$. Man fordert (Vo 1): Es existieren ein Radius $R>0$ und ein sphärisches Gebiet $G\subset S$ mit $B(x_0, R)\cap\Omega=\{x_0+r\omega|\,\omega\in G, 0<r<R\}$. Unsere Betrachtungen werden besonders in solchen Fällen anwendbar sein, in denen das Gebiet G glatt ist. Wir werden die nötigen Glattheitsvoraussetzungen über den Rand von G in den folgenden Betrachtungen erst dann machen, wenn sie gebraucht werden. (In dieser Arbeit werden aber nicht Glattheisvoraus-

setzungen größter Allgemeinheit angestrebt.) Im Falle eines stückweise glatten Gebietes G könnte man einen Entwicklungssatz von Weck [16], [17] verwenden. Wir werden einen solchen Satz für allgemeinere sphärische Gebiete beweisen. Es sei bemerkt, daß wir somit auch solche Gebiete betrachten, für welche keine vollständige Existenztheorie existiert. Andererseits gibt es immer Lösungen (wähle $\omega=i$). Wir sind hier nicht daran interessiert, die Existenztheorie in diese Richtung zu verallgemeinern. Außer (Vo 1) treten die folgenden Voraussetzungen auf (Vo 2): Das sphärische Gebiet G kann mit Hilfe einer Karte dargestellt werden; o. B. d. A. sei $Q=\{\omega=(\theta,\varphi)\,|\,0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi\}$, $u(\omega)=(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ und sei $\bar{G}\subset u(Q)$. Im weiteren werden $u(\omega)$ und ω (wie schon früher) oft identifiziert. (Vo 3): $G_u=u^{-1}(G)$ hat die Segmenteneigenschaft. Man kann (Vo 2) gewissermaßen als eine technische Voraussetzung ansehen. Bedingung (Vo 3) ist wesentlicher. Sie garantiert genügend Eigenschaften für die Neumannsche Aufgabe des Laplace—Beltramischen Operators auf G. Sei $L^{2,2}=\{E=E_\theta\bar{e}_\theta+E_\varphi\bar{e}_\varphi\,|\,E_\theta, E_\varphi\in L^2=L^2(G)\}$ der Raum der quadratintegrablen Flächenfelder. Bezeichne $\mathscr{D}=C_0^\infty(G)$. Analog zum früheren Vorgehen definiert man eine Reihe der Teilräume von $L^{2,2}$ durch

$$D = \{E\in L^{2,2}|\exists F_1\in L^2\colon\ (E|\nabla_\omega\Phi) = -(F_1|\Phi)\ \ \forall\Phi\in\mathscr{D}\},$$

$$R = \{E\in L^{2,2}|\exists F_2\in L^2\colon\ (E|\nabla_\omega\times\Phi) = (F_2|\Phi)\ \ \forall\Phi\in\mathscr{D}\}.$$

Hier ist $\nabla_\omega\Phi=\partial_\theta\Phi\bar{e}_\theta+(\sin\theta)^{-1}\partial_\varphi\Phi\bar{e}_\varphi$, $\nabla_\omega\times\Phi=-\bar{e}_r\times\nabla_\omega\Phi$. Auf D bzw. R setzt man dann $\operatorname{div}_\omega E=\nabla_\omega\cdot E=F_1$, $\operatorname{rot}_\omega E=\nabla_\omega\times E=F_2$. Für differenzierbare Felder stimmen diese Definitionen mit den klassischen Formeln

$$\nabla_\omega\cdot E = (\sin\theta)^{-1}[\partial_\theta(\sin\theta E_\theta)+\partial_\varphi E_\varphi],$$

$$\nabla_\omega\times E = (\sin\theta)^{-1}[\partial_\theta(\sin\theta E_\varphi)-\partial_\varphi E_\theta]$$

überein. Ferner setzt man $R_0=\{E\in R\,|\,\nabla_\omega\times E=0\}$, $D_0=\{E\in D\,|\,\nabla_\omega\cdot E=0\}$ und mit $H^1=H^1(G)$

$$R^0 = \{E\in R|(\nabla_\omega\times E\,|F) = (E\,|\nabla_\omega\times F)\ \ \forall F\in H^1\},$$

$$D^0 = \{E\in D|(\nabla_\omega\cdot E\,|F) = -(E\,|\nabla_\omega F)\ \ \forall F\in H^1\}.$$

Im folgenden bedeutet $\oplus$ die orthogonale Summe. Analog zu [16, Lemma 2] ergibt sich (mit $H_0^1=H_0^1(G)$)

1.1. Lemma. *Sei* (Vo 2) *erfüllt. Dann gilt*

(i) $$L^{2,2} = D_0\oplus\overline{\nabla_\omega H_0^1},$$

(ii) $$L^{2,2} = R_0\oplus\overline{\nabla_\omega\times H_0^1}.$$

Wir benutzen die Eigenfunktionen des Laplace—Beltramischen Operators mit der Dirichletschen und mit der Neumannschen Aufgabe auf G. Man führt die entsprechenden Operatoren Δ_i: $D(\Delta_i)\subset L\to L$, $i=0, 1$ mit

$$D(\Delta_0) = \{u\in H_0^1 \mid \exists f_1\in L^2\colon (\nabla_\omega u|\nabla_\omega \varphi) = -(f_0|\varphi)\ \forall\varphi\in H_0^1\},$$
$$D(\Delta_1) = \{u\in H^1 \mid \exists f_2\in L^2\colon (\nabla_\omega u|\nabla_\omega \varphi) = -(f_1|\varphi)\ \forall\varphi\in H^1\},$$

$\Delta_i u := f_i$, $u\in D(\Delta_i)$ ein. Die Operatoren $-\Delta_i$ sind selbstadjungiert und nichtnegativ. Unabhängig von G besitzt $-\Delta_0$ eine unendliche Menge $\{\lambda_{n,0}\}_1^\infty$ der nach der Vielfachheit gezählten Eigenwerte $0<\lambda_{1,0}<\lambda_{2,0}\leqq\ldots\to\infty$ die sich im Endlichen nirgends häufen. Sei entsprechend $\{\lambda_{n,1}\}_0^\infty$ die Menge der Eigenwerte für $-\Delta_1$. Das oben gesagte gilt für $-\Delta_1$, falls das Gebiet G_u die Segmenteneigenschaft besitzt, denn dann ist die Resolvente kompakt. Man beachte, daß der unterste Eigenwert ($\lambda_{1,0}>0$ bzw. $\lambda_{0,1}=0$) für die beiden Operatoren einfach ist; für $-\Delta_0$ siehe [2], [3]. Seien $\{E_n\}_1^\infty$ bzw. $\{H_n\}_0^\infty$ die orthonormierten Eigenfunktionen von $-\Delta_0$ bzw. $-\Delta_1$. Wir definieren die folgenden Flächenfelder ($\omega_{n,i}:=\sqrt{\lambda_{n,i}}$)

$$E_n^1 = i\omega_{n,0}^{-1}\nabla_\omega E_n, \qquad E_n^2 = i\omega_{n,0}^{-1}\bar{e}_r\times\nabla_\omega E_n,$$
$$H_n^1 = i\omega_{n,1}^{-1}\nabla_\omega H_n, \qquad H_n^2 = i\omega_{n,1}^{-1}\bar{e}_r\times\nabla_\omega H_n$$

für $n\geqq 1$. Die Systeme $\{E_n^i\}_1^\infty$, $\{H_n^i\}_1^\infty$ sind orthonormiert. Weiterhin gilt $(E_n^1|H_m^2)=(E_n^2|H_m^1)=0$ für alle n, m. Im Raum H^1 sei die $\|\cdot\|_1$-Norm $\|u\|_1=(\|u\|^2+\|\nabla_\omega u\|^2)^{1/2}$ festgelegt. Wie [7, Satz 6.7.2] zeigt man

1.2. Lemma. *Seien* (Vo 2), (Vo 3) *erfüllt. Für* $H\in H_0^1$ *gilt* $H=\sum_{n=1}^\infty (H|E_n)E_n$ *in* H_0^1, *und für* $H\in H^1$ *gilt* $H=\sum_{n=1}^\infty (H|H_n)H_n$ *in* H^1 *(d. h. die Summen konvergieren in bezug auf die* $\|\cdot\|_1$*-Norm).*

Wir kürzen noch $\mathcal{H}=R^0\cap R_0\cap D_0$, $\mathcal{H}^*=D^0\cap D_0\cap R_0$ ab.

1.3. Satz. *Die Voraussetzungen* (Vo 2), (Vo 3) *seien erfüllt. Dann sind die folgenden Systeme vollständig in den entsprechenden Räumen*

(i) $\{E_n^1\}_1^\infty$ *in* $\overline{\nabla_\omega H_0^1}$,

(ii) $\{E_n^2\}_1^\infty$ *in* $\overline{\nabla_\omega\times H_0^1}$,

(iii) $\{H_n^2\}_1^\infty$ *in* $D_0\cap\mathcal{H}^\perp$,

(iv) $\{H_n^1\}_1^\infty$ *in* $R_0\cap(\mathcal{H}^*)^\perp$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die betrachteten Felder zu den entsprechenden Räumen gehören. Vom Rest wird nur (iii) argumentiert. Sei $E\in D_0\cap\mathcal{H}^\perp$ mit $(E|H_n^2)=0$, $n\in N$. Weil die Eigenfunktion H_0 konstant ist, folgt $0=(E|\bar{e}_r\times\nabla_\omega H_n)=(E|\nabla_\omega\times H_n)$ für alle $n\in N_0$. Nach Lemma 1.2 gilt $(E|\nabla_\omega\times H)=0$, $H\in H^1$. Also ist $E\in R^0\cap R_0$ und folglich $E\in\mathcal{H}\cap\mathcal{H}^\perp=\{0\}$. □

Sei $x_0\in\Gamma$ derart, daß (Vo 1)—(Vo 3) erfüllt ist. O. B. d. A. wählt man $x_0=0$, und man setzt $U=U(R)=B(0, R)\cap\Omega$. Man betrachtet ein divergenzfreies Feld

E, das der Gleichung (0.3) genügt. Gleichbedeutend ist dann $(\lambda = -\omega^2)$

$$\nabla \times \nabla \times E + \lambda E = F, \quad E \in R^0(\Omega) \cap D_0(\Omega). \tag{1.1}$$

Von nun an setzen wir voraus, daß das sphärische Gebiet G einfach zusammenhängend ist. Damit meinen wir, daß (Vo 4) $\dim \mathscr{H} = 0$ gilt. Unter einigen schwachen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß diese Bedingung mit dem üblichen geometrischen Begriff übereinstimmt [9]. Die Forderung $\dim \mathscr{H} = 0$ ist auch äquivalent mit $\dim \mathscr{H}^* = 0$, denn $E \in \mathscr{H} \Leftrightarrow \bar{e}_r \times E \in \mathscr{H}^*$. Aus $E \in L^2(U)^3$ folgt, daß mit $E = E_r \bar{e}_r + E_\theta \bar{e}_\theta + E_\varphi \bar{e}_\varphi = E_r \bar{e}_r + E^u$ für fast alle $0 < r < R$ die Relationen $E_r \in L^2$, $E^u \in L^{2,2}$ gelten. Wir setzen $E_n^0 = E_n \bar{e}_r$. Nach Lemma 1.1, Satz 1.3 kann man in L^2 bzw. $L^{2,2}$ entwickeln

$$E_r(r, \omega) = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) E_n(\omega),$$

$$E^u(r, \omega) = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \big(b_n(r) H_n^2(\omega) + c_n(r) E_n^1(\omega)\big).$$

Wegen $E \in L^2(U)^3$ ist die Entwicklung

$$E = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n E_n^0 + b_n H_n^2 + c_n E_n^1) \tag{1.2}$$

richtig in $L^2(U)^3$, und man erhält

$$\|E\|_{0, U(R)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R \big(|a_n(r)|^2 + |b_n(r)|^2 + |c_n(r)|^2\big)\, dr. \tag{1.3}$$

Für das Feld $\nabla \times E$ ergibt sich mit $H_n^0 = H_n \bar{e}_r$ in $L^2(U)^3$

$$\nabla \times E = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [-i\omega_{n,1} r^{-1} b_n H_n^0 - b_n' H_n^1 + (i\omega_{n,0} r^{-1} a_n + c_n') E_n^2] \tag{1.4}$$

mit

$$\|\nabla \times E\|_{0, U(R)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R (\lambda_{n,1} r^{-2} |b_n|^2 + |b_n'|^2 + |i\omega_{n,0} r^{-1} a_n + c_n'|^2)\, dr. \tag{1.5}$$

Die Ableitungen in (1.4) sind distributional definiert. Die Darstellung (1.4) erhält man wie folgt. Man entwickelt

$$E = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_n^0 + B_n E_n^2 + C_n H_n^1)$$

und benutzt die Umformung $(\nabla \times E \mid \Phi) = (E \mid \nabla \times \Phi)$ mit $\Phi = r^{-1} \varphi H_n^0, r^{-1} \varphi E_n^2$, $r^{-1} \varphi H_n^1$, $\varphi \in \mathscr{D}((0, R))$. Im weiteren setzen wir zuerst $\lambda = 0$. Wenn F die Entwicklung

$$F = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n E_n^0 + \beta_n H_n^2 + \gamma_n E_n^1) \tag{1.6}$$

in $L^2(U)^3$ besitzt, führt die Gleichung (1.1) $(\lambda = 0)$ auf das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\lambda_{n,0} r^{-1} a_n - i\omega_{n,0} c_n' = r\alpha_n, \tag{1.7i}$$

$$b_n'' - r^{-2}\lambda_{n,1} b_n = -\beta_n, \tag{1.7ii}$$

$$i\omega_{n,0}(r^{-1}a_n)' + c_n'' = -\gamma_n. \tag{1.7iii}$$

Aus der Bedingung $\operatorname{div} E = 0$ folgt

$$(ra_n)' - i\omega_{n,0} c_n = 0. \tag{1.8}$$

Auch in (1.7), (1.8) sind die Ableitungen im schwachen Sinn definiert.

2. Verhalten der Koeffizienten

Ausgehend von dem System (1.7), (1.8) und von den Bedingungen E, $\nabla \times E \in L^2(U)^3$ untersuchen wir in diesem Abschnitt die Asymptotik der Koeffizienten a_n, b_n, c_n mit $r \to 0$. Zur Diskussion des Verhaltens Verwenden wir eine Technik von Kondrat'ev [4]. Besonders das folgende Lemma ist eine solche verschärfte Version von Theorem 1.2 [4], wo die Abhängigkeit vom Parameter λ_n berücksichtigt wird. Die Argumente werden nur kurz gegeben. Aus (1.7i), (1.8) ergibt sich

$$a_n'' + 2r^{-1} a_n' - \lambda_{n,0} r^{-2} a_n = -\alpha_n. \tag{2.1}$$

Die Gleichungen (1.7ii), (2.1) sind allgemeinerer Form

$$u'' + \beta_1 r^{-1} u' - \lambda_n r^{-2} u = -f \tag{2.2}$$

mit $\beta_1 \in \boldsymbol{R}$. Die Gleichung (2.2) gelte in $\boldsymbol{R}_+ = \{r \mid r > 0\}$. Führt man in (2.2) eine neue Variable $\tau = \ln r^{-1}$ ein, und setzt man $v(\tau) = u(e^{-\tau})$, $g(\tau) = f(r^{-\tau})$, dann folgt

$$v'' + (1-\beta_1)v' - \lambda_n v = -e^{-2\tau} g(\tau) =: -G(\tau). \tag{2.3}$$

Für die Fourier-Transformierte $\tilde{v}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} v(\tau)\, d\tau$ gilt

$$P_n(\lambda)\tilde{v}(\lambda) = \tilde{G}(\lambda) \tag{2.4}$$

mit $P_n(\lambda) = \lambda^2 - i(1-\beta_1)\lambda + \lambda_n$. Unsere einschränkenden Bedingungen für u und f werden derart sein, daß die obige formale Rechnung berechtigt ist. Man definiert die folgenden gewichteten Normen und Räume

$$\|u\|_{k,\alpha}^2 = \sum_{\nu=0}^{k} \|r^{\alpha/2-(k-\nu)} u^{(\nu)}\|^2 = \sum_{\nu=0}^{k} \int_0^{\infty} r^{\alpha-2(k-\nu)} \left| \left(\frac{d}{dr}\right)^{\nu} u(r) \right|^2 dr$$

und $W_\alpha^k = \{u \in H^{k,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+) \mid \|u\|_{k,\alpha} < \infty\}$. Sei ferner $(\lambda_n)_1^\infty$, $\lambda_n \to \infty$ eine Folge von reellen Zahlen, die keinen endlichen Häufungspunkt besitzt. Verknüpft mit der Folge $(\lambda_n)_1^\infty$ erklärt man

$$\|u\|_{k,\alpha,(\lambda_n)}^2 = \sum_{\nu=0}^{k} (1+|\lambda_n|)^{k-\nu} \|r^{\alpha/2-(k-\nu)} u^{(\nu)}\|^2.$$

2.1. Lemma. *Sei* $h_1=(2k_1-\alpha_1+3)/2$, $h=(2k-\alpha-1)/2$ *und sei* $h_1>h$. *Wenn* $P_n(\lambda)\neq 0$ *für alle* n *und alle* λ *mit* $\operatorname{Im}\lambda=h_1$ *gilt, ergibt sich für alle Lösungen* $u\in W_\alpha^k$ *der Gleichung* (2.2) *mit* $f\in W_{\alpha_1}^{k_1}$ *die Zerlegung*

$$u = w+i\sum_{h<\operatorname{Im}\lambda<h_1}\operatorname{Res}\left(\frac{\tilde G(\lambda)}{P_n(\lambda)}e^{i\tau\lambda}\right)\Bigg|_{\tau=\ln r^{-1}} \tag{2.5}$$

mit $w\in W_{\alpha_1}^{k_1+2}$. *Die Funktion* w *erfüllt die Abschätzung*

$$\|w\|_{k_1+2,\alpha_1,(\lambda_n)}\leqq C\|f\|_{k_1,\alpha_1,(\lambda_n)}. \tag{2.6}$$

Beweis. Für $h\leqq h'\leqq h_1$ rechnet man

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{h'\tau}G(\tau)|^2\,d\tau &= \int_0^\infty r^{3-2h'}|f(r)|^2\,dr\\ &\leqq C(\|u\|_{k,\alpha}^2+\|f_{k_1,\alpha_1}^2\|)<\infty.\end{aligned}$$

Demzufolge ist $\lambda\mapsto\tilde G(\lambda)$ analytisch im Segment $h<\operatorname{Im}\lambda<h_1$, und man kann invertieren

$$\begin{aligned}v(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih}e^{i\tau\lambda}\,\tilde v(\lambda)\,d\lambda\\ &= w_1(\tau)+i\sum_{h<\operatorname{Im}\lambda<h_1}\operatorname{Res}\frac{\tilde G(\lambda)}{P_n(\lambda)}e^{i\tau\lambda}\end{aligned} \tag{2.7}$$

mit

$$w_1(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}e^{i\tau\lambda}\,\tilde v(\lambda)\,d\lambda.$$

Weil das Polynom $P_n(\lambda)$ für $\operatorname{Im}\lambda=h_1$ keine Nullstellen besitzt, folgert man aus (2.4) die Ungleichung

$$|\tilde v(\lambda)|\leqq C(1+|\lambda_n|)^{p/2-1}(1+|\lambda|)^{-p}|\tilde G(\lambda)| \tag{2.8}$$

mit $p=0, 1, 2$, $\operatorname{Im}\lambda=h_1$. Mit Hilfe von (2.8) rechnet man für $w(r)=w_1(\ln(1/r))$

$$\begin{aligned}\|w\|_{k_1+2,\alpha_1,(\lambda_n)}^2 &\leqq C\sum_{\nu=0}^{k_1+2}(1+|\lambda_n|)^{k_1+2-\nu}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2h_1\tau}|w_1^{(\nu)}(\tau)|^2\,d\tau\\ &= C\sum_{\nu=0}^{k_1+2}(1+|\lambda_n|)^{k_1+2-\nu}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}|\lambda|^{2\nu}|\tilde v(\lambda)|^2\,d\lambda\\ &\leqq C\sum_{\nu=0}^{k_1}(1+|\lambda_n|)^{k_1-\nu}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}|\lambda|^{2\nu}|\tilde G(\lambda)|^2\,d\lambda\leqq C\|f\|_{k_1,\alpha_1}^2.\end{aligned}$$

Die Formel (2.7) führt auf (2.5). □

Sei $0<R_0<R$. Es wird abgekürzt

$$L_n^0 u = -(u''+2r^{-1}u'-\lambda_{n,0}r^{-2}u),$$

$$L_n^1 u = -(u''-\lambda_{n,1}r^{-2}u).$$

Im folgenden bedeutet η eine beliebige Funktion $\eta\in\mathscr{D}((-\infty, R))$, die in einer Umgebung des Punktes $r=0$ identisch Eins ist. Die Bedeutung der Bezeichnungen $W_\alpha^k(R_0)=W_\alpha^k((0, R_0))$ usw. ist klar.

2.2. Satz. *Sei* $\lambda_{n,0}\neq 15/4$ *und sei* $\lambda_{n,1}\neq 3/4$ *für alle* n. *In* $(0, R_0)$ *hat man die Zerlegungen*

(2.9i) $$a_n(r) = a_n^0(r)+\delta_n^1 r^{\nu_n},$$

(2.9ii) $$c_n(r) = c_n^0(r)+\delta_n^2 r^{\nu_n},$$

(2.9iii) $$n_n(r) = b_n^0(r)+\delta_n^3 r^{\varkappa_n},$$

mit $\nu_n=2^{-1}(-1+(1+4\lambda_{n,0})^{1/2})$, $\varkappa_n=2^{-1}(1+(1+4\lambda_{n,1})^{1/2})$ *und mit Konstanten* δ_n^i *derart, daß* $\delta_n^1=\delta_n^2=0$ *für* $\lambda_{n,0}>15/4$ *und* $\delta_n^3=0$ *für* $\lambda_{n,1}>3/4$ *ist. Für* $\lambda_{n,0}<15/4$ *bzw.* $\lambda_{n,1}<3/4$ (2.10iii) *gilt*

(2.10i) $$\delta_n^1 = (1+4\lambda_{n,0})^{-1/2}\int_0^R r^{-\nu_n+1}L_n^0(\eta a_n)\,dr,$$

(2.10ii) $$\delta_n^2 = (i\omega_{n,0})^{-1}\delta_n^1(1+\nu_n),$$

(2.10iii) $$\delta_n^3 = (1+4\lambda_{n,1})^{-1/2}\int_0^R r^{-\varkappa_n+1}L_n^1(\eta b_n)\,dr$$

mit den Abschätzungen

(2.11i) $$|\delta_n^1|+|\delta_n^2| \leqq C(\|\alpha_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R))^{1)},$$

(2.11ii) $$|\delta_n^3| \leqq C(\|\beta_n\|(R)+\|b_n\|_{1,(R_0,R)}).$$

Ferner gilt $a_n^0, b_n^0, c_n^0\in W_0^2(R_0^2)$ *mit*

(2.12i) $$\|a_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C(\|a_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R)),$$

(2.12ii) $$\|c_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C(\|\alpha_n\|(R)+\|\gamma_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R)),$$

(2.12iii) $$\|b_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,1})}(R_0) \leqq C(\|\beta_n\|(R)+\|b_n\|_{1,(R_0,R)}).$$

Beweis. Die Bedingungen $E, F\in L^2(U)^3$, $\operatorname{div} E=0$ implizieren $\eta a_n\in W_4^2$, $L_n^0(\eta a_n)\in W_0^0=L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Wählt man in Lemma 2.1 $\alpha=4$, $\alpha_1=0$, $k=2$, $k_1=0$, dann erhält man

$$\eta(r)a(r,\eta) = a_n^0(r,\eta)+\delta_n^1 r^{\nu_n}$$

[1] $\|\alpha_n\|(R) = \|\alpha_n\|_{0,[0,R]}$.

2.1. Lemma. *Sei* $h_1=(2k_1-\alpha_1+3)/2$, $h=(2k-\alpha-1)/2$ *und sei* $h_1>h$. *Wenn* $P_n(\lambda)\neq 0$ *für alle* n *und alle* λ *mit* $\operatorname{Im}\lambda=h_1$ *gilt, ergibt sich für alle Lösungen* $u\in W_\alpha^k$ *der Gleichung* (2.2) *mit* $f\in W_{\alpha_1}^{k_1}$ *die Zerlegung*

$$u=w+i\sum_{h<\operatorname{Im}\lambda<h_1}\operatorname{Res}\left(\frac{\tilde G(\lambda)}{P_n(\lambda)}e^{i\tau\lambda}\right)\Bigg|_{\tau=\ln r^{-1}} \tag{2.5}$$

mit $w\in W_{\alpha_1}^{k_1+2}$. *Die Funktion* w *erfüllt die Abschätzung*

$$\|w\|_{k_1+2,\alpha_1,(\lambda_n)}\leqq C\|f\|_{k_1,\alpha_1,(\lambda_n)}. \tag{2.6}$$

Beweis. Für $h\leqq h'\leqq h_1$ rechnet man

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{h'\tau}G(\tau)|^2\,d\tau&=\int_0^\infty r^{3-2h'}|f(r)|^2\,dr\\&\leqq C(\|u\|_{k,\alpha}^2+\|f_{k_1,\alpha_1}^2\|)<\infty.\end{aligned}$$

Demzufolge ist $\lambda\mapsto\tilde G(\lambda)$ analytisch im Segment $h<\operatorname{Im}\lambda<h_1$, und man kann invertieren

$$\begin{aligned}v(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih}e^{i\tau\lambda}\tilde v(\lambda)\,d\lambda\\&=w_1(\tau)+i\sum_{h<\operatorname{Im}\lambda<h_1}\operatorname{Res}\frac{\tilde G(\lambda)}{P_n(\lambda)}e^{i\tau\lambda}\end{aligned} \tag{2.7}$$

mit

$$w_1(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}e^{i\tau\lambda}\tilde v(\lambda)\,d\lambda.$$

Weil das Polynom $P_n(\lambda)$ für $\operatorname{Im}\lambda=h_1$ keine Nullstellen besitzt, folgert man aus (2.4) die Ungleichung

$$|\tilde v(\lambda)|\leqq C(1+|\lambda_n|)^{p/2-1}(1+|\lambda|)^{-p}|\tilde G(\lambda)| \tag{2.8}$$

mit $p=0,1,2$, $\operatorname{Im}\lambda=h_1$. Mit Hilfe von (2.8) rechnet man für $w(r)=w_1\big(\ln(1/r)\big)$

$$\begin{aligned}\|w\|_{k_1+2,\alpha_1,(\lambda_n)}^2&\leqq C\sum_{\nu=0}^{k_1+2}(1+|\lambda_n|)^{k_1+2-\nu}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2h_1\tau}|w_1^{(\nu)}(\tau)|^2\,d\tau\\&=C\sum_{\nu=0}^{k_1+2}(1+|\lambda_n|)^{k_1+2-\nu}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}|\lambda|^{2\nu}|\tilde v(\lambda)|^2\,d\lambda\\&\leqq C\sum_{\nu=0}^{k_1}(1+|\lambda_n|)^{k_1-\nu}\int_{-\infty+ih_1}^{\infty+ih_1}|\lambda|^{2\nu}|\tilde G(\lambda)|^2\,d\lambda\leqq C\|f\|_{k_1,\alpha_1}^2.\end{aligned}$$

Die Formel (2.7) führt auf (2.5). □

Sei $0<R_0<R$. Es wird abgekürzt

$$L_n^0 u = -(u''+2r^{-1}u'-\lambda_{n,0}r^{-2}u),$$
$$L_n^1 u = -(u''-\lambda_{n,1}r^{-2}u).$$

Im folgenden bedeutet η eine beliebige Funktion $\eta\in\mathscr{D}((-\infty, R))$, die in einer Umgebung des Punktes $r=0$ identisch Eins ist. Die Bedeutung der Bezeichnungen $W_\alpha^k(R_0)=W_\alpha^k((0, R_0))$ usw. ist klar.

2.2. Satz. *Sei $\lambda_{n,0}\neq 15/4$ und sei $\lambda_{n,1}\neq 3/4$ für alle n. In $(0, R_0)$ hat man die Zerlegungen*

(2.9i) $$a_n(r) = a_n^0(r)+\delta_n^1 r^{\nu_n},$$

(2.9ii) $$c_n(r) = c_n^0(r)+\delta_n^2 r^{\nu_n},$$

(2.9iii) $$n_n(r) = b_n^0(r)+\delta_n^3 r^{\varkappa_n},$$

mit $\nu_n=2^{-1}(-1+(1+4\lambda_{n,0})^{1/2})$, $\varkappa_n=2^{-1}(1+(1+4\lambda_{n,1})^{1/2})$ und mit Konstanten δ_n^i derart, daß $\delta_n^1=\delta_n^2=0$ für $\lambda_{n,0}>15/4$ und $\delta_n^3=0$ für $\lambda_{n,1}>3/4$ ist. Für $\lambda_{n,0}<15/4$ bzw. $\lambda_{n,1}<3/4$ (2.10iii) gilt

(2.10i) $$\delta_n^1 = (1+4\lambda_{n,0})^{-1/2}\int_0^R r^{-\nu_n+1}L_n^0(\eta a_n)\,dr,$$

(2.10ii) $$\delta_n^2 = (i\omega_{n,0})^{-1}\delta_n^1(1+\nu_n),$$

(2.10iii) $$\delta_n^3 = (1+4\lambda_{n,1})^{-1/2}\int_0^R r^{-\varkappa_n+1}L_n^1(\eta b_n)\,dr$$

mit den Abschätzungen

(2.11i) $$|\delta_n^1|+|\delta_n^2| \leqq C(\|\alpha_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R))^{1)},$$

(2.11ii) $$|\delta_n^3| \leqq C(\|\beta_n\|(R)+\|b_n\|_{1,(R_0,R)}).$$

Ferner gilt $a_n^0, b_n^0, c_n^0\in W_0^2(R_0^2)$ mit

(2.12i) $$\|a_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C(\|a_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R)),$$

(2.12ii) $$\|c_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C(\|\alpha_n\|(R)+\|\gamma_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R)),$$

(2.12iii) $$\|b_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,1})}(R_0) \leqq C(\|\beta_n\|(R)+\|b_n\|_{1,(R_0,R)}).$$

Beweis. Die Bedingungen $E, F\in L^2(U)^3$, $\operatorname{div} E=0$ implizieren $\eta a_n\in W_4^2$, $L_n^0(\eta a_n)\in W_0^0=L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Wählt man in Lemma 2.1 $\alpha=4$, $\alpha_1=0$, $k=2$, $k_1=0$, dann erhält man

$$\eta(r)\,a(r,\eta) = a_n^0(r,\eta)+\delta_n^1 r^{\nu_n}$$

[1] $\|\alpha_n\|(R) = \|\alpha_n\|_{0,[0,R]}$.

mit $\delta_n^1=0$ für $\lambda_{n,0}>15/4$ und mit

$$\delta_n^1 = i\tilde{G}(i\nu_n) \operatorname*{Res}_{\lambda=i\nu_n} P_n(\lambda)^{-1}$$
$$= (1+4\lambda_{n,0})^{-1/2} \int_0^R r^{-\nu_n+1} L_n^0(\eta a_n)\, dr$$

für $\lambda_{n,0}<15/4$. Man wähle $R_0<R_1<R$ und $\eta_0\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ mit $\eta_0(r)=1, 0\leqq r\leqq R_0$, $\eta_0(r)=0, r\geqq R_1$. Ferner sei $a_n^0(r)=a_n^0(r, \eta_0)$. Nach (2.6), (1.8) rechnet man

$$\|a_n^0\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C\|L_n^0(\eta_0 a_n)\|(R_1)$$
$$\leqq C\big(\|\alpha_n\|(R_1)+\|a_n\|_{1,(R_0,R_1)}\big)$$
$$\leqq C\big(\|\alpha_n\|(R_1)+\|a_n\|(R_1)+\omega_{n,0}\|c_n\|(R_0, R_1)\big).$$

Für (2.12i) genügt es folglich $\lambda_{n,0}>15/4$ zu betrachten. Dann gilt $a_n=a_n^0$ in $(0, R_0)$, und demzufolge

(2.13) $$\|a_n\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_0) \leqq C\big(\|\alpha_n\|(R_1)+\|a_n\|_{1,(R_0,R_1)}\big).$$

Ähnlich hat man dann

(2.14) $$\|a_n\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_1) \leqq C\big(\|\alpha_n\|(R)+\|a_n\|_{1,(R_1,R)}\big).$$

Daraus schließt man

(2.15) $$\|a_n\|_{1,(R_0,R_1)} \leqq C\lambda_{n,0}^{-1/2}\|a_n\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}(R_1)$$
$$\leqq C\big(\|\alpha_n\|(R)+\|a_n\|(R)+\|c_n\|(R)\big).$$

Die Abschätzung (2.12i) folgt aus (2.13), (2.15). Der Operator $r^2L_n^0$ ist symmetrisch, und es gilt $L_n^0(r^{-\nu_n-1})=0$. Das impliziert, daß das Integral in (2.10i) von η unabhängig ist. Nach (1.8), (2.9i) gilt für die Koeffizienten $c_n(r)$ (2.9ii) mit $c_n^0(r)=-i\omega_{n,0}^{-1}(ra_n^0)'$. Die Abschätzung (2.12ii) beweist man mit Hilfe von (2.7iii), (2.12i). Die Ungleichung (2.12iii) ist nun ersichtlich. Die Ungleichungen (2.11) sieht man leicht. □

3. Verhalten der Lösung

Wir diskutieren die $H^2(U(R_0))^3$-Regularität der Lösung. Man setze $\bar{e}^1=\bar{e}_r$, $\bar{e}^2=\bar{e}_\theta$, $\bar{e}^3=\bar{e}_\varphi$. Sei $E=\sum_{j=1}^3 E^j\bar{e}^j$ in $U(R)$. Für die Norm $\|\cdot\|_{2,U(R)}$, definiert durch

$$\|E\|_{2,U(R)}^2 = \sum_{i=1}^3 \|E_i\|_{2,U(R)}^2$$

wo $E_i=\sum_{j=1}^3 E^j(\bar{e}^j\cdot\bar{e}^i)$ die kartesischen Komponenten sind, errechnet man die Schranke

(3.1) $$\|E\|_{2,U(R)}^2 \leqq C\sum_{j=1}^3\int_0^R\left(\sum_{\nu=0}^2 r^{2-2\nu}\left\|\left(\frac{d}{dr}\right)^{2-\nu}E^j\right\|_\nu^2\right)dr$$

für $E\in H^{2,\mathrm{loc}}(U(R))^3$. Hier wurde $\|u\|_\nu=\|u(\omega)\|_{\nu,G_\alpha}$ gesetzt. Für die Eigenlösungen sind die Abschätzungen $\|E_n\|_\nu^2\leqq C\lambda_{n,0}^\nu$, $\|H_n\|_\nu^2\leqq C\lambda_{n,1}^\nu$, $0\leqq\nu\leqq 1$, $n\geqq 1$ unabhängig vom Gebiet G richtig. Um die $H^2(U(R_0))^3$-Abschätzung zu gewinnen machen wir stärkere Annahmen an die Regularität der Eigenlösungen (Vo 5):

(3.2i) $$\|E_n\|_\nu^2 \leqq C\lambda_{n,0}^\nu,\quad 0\leqq\nu\leqq 3,$$

(3.2ii) $$\|H_n\|_n^2 \leqq C\lambda_{n,1}^\nu,\quad 0\leqq\nu\leqq 3,\ n\geqq 1.$$

Falls das sphärische Gebiet G glatt ist, sind diese Voraussetzungen erfüllt. Sei nun

(3.3) $$S_N=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^N(a_nE_n^0+b_nH_n^2+c_nE_n^1).$$

Nach (3.1) ergibt sich unter (Vo 5)

(3.4) $$\|S_N\|_{2,U(R)}^2$$
$$\leqq C\sum_{n=1}^N\left(\|a_n\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}^2(R)+\|b_n\|_{2,0,(\lambda_{n,1})}^2(R)+\|c_n\|_{2,0,(\lambda_{n,0})}^2(R)\right).$$

Man betrachtet nun die Gleichung (1.1) mit einer allgemeinen Konstante $\lambda\in\boldsymbol{C}$. Falls das Feld E bzw. F die Entwicklung (1.2) mit den Koeffizienten $a_n(r,\lambda)$, $b_n(r,\lambda)$, $c_n(r,\lambda)$ bzw. $\alpha_n(r)$, $\beta_n(r)$, $\gamma_n(r)$ besitzt, erfüllen die Koeffizienten $a_n(r,\lambda)$, $b_n(r,\lambda)$, $c_n(r,\lambda)$ ein modifiziertes System (1.7), (1.8), wo anstelle α_n, β_n, γ_n die Funktionen $\alpha_n^*=\alpha_n-\lambda a_n$, $\beta_n^*=\beta_n-\lambda b_n$, $\gamma_n^*=\gamma_n-\lambda c_n$ auftreten. Ähnlich tritt in Satz 2.2 die Abhängigkeit von λ wie $\delta_n^i(\lambda)$ usw. auf.

Man setzt $D_0(\Omega)=\{E\in D(\Omega)\mid \operatorname{div} E=0\}$.

3.1. Satz. *Sei $\lambda\in\boldsymbol{C}$ und sei $E\in R^0(\Omega)\cap D_0(\Omega)$ eine Lösung der Aufgabe* (1.1) *mit $F\in D_0(\Omega)$. Ferner seien die Voraussetzungen* (Vo 1)—(Vo 5) *erfüllt und sei $\lambda_{n,0}\neq 15/4$, $\lambda_{n,1}\neq 3/4$ für alle n. Das Feld E besitzt dann in $L^2(U(R_0))^3$ die Darstellung*

(3.5) $$E=\sum_{\lambda_{n,0}<15/4} r^{-3/2+(1+4\lambda_{n,0})^{1/2}/2}\left(\delta_n^2(\lambda)E_n^0+\delta_n^2(\lambda)E_n^1\right)$$
$$+\sum_{\lambda_{n,1}<3/4} r^{-1/2+(1+4\lambda_{n,1})^{1/2}/2}\delta_n^3(\lambda)H_n^2+W_\lambda$$

mit $W_\lambda\in H^2(U(R_0))^3$ derart, daß die Ungleichung

(3.6) $$\|W_\lambda\|_{2,U(R_0)}\leqq C(\lambda)(\|E\|+\|F\|)$$

richtig ist. Für das Feld W_λ *gilt die in* $H^2(U(R_0))^3$ *konvergente Entwicklung*

(3.7) $$W_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(a_n^0(r,\lambda) E_n^0 + b_n^0(r,\lambda) H_n^2 + c_n^0(r,\lambda) E_n^1\right).$$

Die Konstanten $\delta_n^i(\lambda)$ *können mit*

(3.8) $$\sum_{\lambda_{n,0}<15/4} \left(|\delta_n^1(\lambda)|^2 + |\delta_n^2(\lambda)|^2\right) + \sum_{\lambda_{n,1}<3/4} |\delta_n^3(\lambda)|^2 \leqq C(\lambda)(\|E\|^2+\|F\|^2)$$

abgeschätzt werden.

Beweis. Jedenfalls ist (3.5) richtig in dem Sinn, daß W_λ die Entwicklung (3.7) in $L^2(U(R_0))^3$ hat. Sei

(3.9) $$S_N^0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{r}\left(a_n^0(r,\lambda) E_n^0 + b_n^0(r,\lambda) H_n^2 + c_n^0(r,\lambda) E_n^1\right).$$

Für $M>N$ ergibt sich nach (3.4), (2.12)

$$\|S_M^0 - S_N^0\|^2_{2,U(R_0)} \leqq C \sum_{N+1}^{M} \left(\|\alpha_n^*\|^2(R) + \|\beta_n^*\|^2(R) + \|\gamma_n^*\|^2(R)\right)$$
$$+ C \sum_{N+1}^{M} \left(\|a_n(r,\lambda)\|^2(R) + \|b_n(r,\lambda)\|^2(R) + \|c_n(r,\lambda)\|^2(R) + \|b_n'(r,\lambda)\|^2_{0,(R_0,R_1)}\right).$$

Weil man für die ganze Summe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|\alpha_n^*\|^2(R) + \ldots + \|b_n'(r,\lambda)\|^2_{0,(R_0,R_1)}\right)$ die Schranke

(3.10) $$\leqq C(\|F-\lambda E\|^2 + \|E\|^2 + \|\nabla\times E\|^2) \leqq C(\lambda)(\|E\|^2+\|F\|^2)$$

findet, ist $(S_N^0)_1^\infty$ als Cauchy—Folge konvergent. Für das Grenz-element $W_\lambda \in H^2(U(R_0))^3$ hat man wegen (3.10) die Ungleichung (3.6). Die Behauptung (3.8) folgt aus (2.11). □

Wir kehren nun zu der Aufgabe (1.1) mit $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \neq 0$ und mit $\operatorname{div} F \in H_0^1(\Omega)$ zurück. Wie üblich zerlegen wir das Feld F in einen divergenzfreien Teil F_0 und in ein Gradientenfeld F_1 wie folgt: $F=F_0+F_1$, $F_1 = \nabla(\Delta_0^{-1}(\operatorname{div} F))$. Wenn man die Lösung $E=E_0+E_1$ ähnlich darstellt, ist die Aufgabe (1.1) äquivalent mit

(3.11) $$\nabla\times\nabla\times E_0 + \lambda E_0 = F_0, \quad E_0 \in R^0(\Omega)\cap D_0(\Omega)$$

(3.12) $$E_1 = \lambda^{-1} F_1.$$

Hier gelten die Abschätzungen

(3.13) $$\|E_1\| \leqq C(\lambda)\|\operatorname{div} F\|,$$

(3.14) $$\|E_0\| \leqq C(\lambda)(\|E\| + \|\operatorname{div} F\|).$$

Um den Teil E_1 behandeln zu können, brauchen wir eine Regularitätsaussage für die Poissonsche Aufgabe. Es liegt in unserem Interesse das Lemma in allen Dimensionen $p \geqq 2$ zu formulieren. Im folgenden sind die Funktionen a_n die Entwicklungskoeffizienten in $u=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) E_n(\omega)$. Ferner setzt man

$$L_n u = -\left(u''+(p-1)r^{-1}u'-\lambda_{n,0}r^{-2}u\right).$$

3.2. Lemma. *Sei* (3.2i) *erfüllt und sei* $\lambda_{n,0} \neq 4^{-1}\left(16-(p-2)^2\right)$ *für alle* n. *Ferner sei* u, $f \in H^1(U(R))$, $\Delta u = f$ *sowie* ξu, $\xi f \in H_0^1(U(R))$ *für* $\xi \in \mathscr{D}(B(0, R))$. *Für die Funktionen* u *gilt in* $U(R_0)$ *die Zerlegung*

$$u = \sum_{\lambda_{n,0}<\lambda(p)} \delta_n r^{\nu_n} E_n(\omega) + w \tag{3.15}$$

mit $\lambda(p)=4^{-1}\left(16-(p-2)^2\right)$, $\nu_n = 2^{-1}\left(2-p+((2-p)^2+4\lambda_{n,0})^{1/2}\right)$,

$$\delta_n = \left((2-p)^2+4\lambda_{n,0}\right)^{-1/2} \int_0^R r^{-\nu_n+1} L_n(\eta a_n)\, dr. \tag{3.16}$$

Ferner gilt $w \in H^3(U(R_0))$, *und man kann abschätzen*

$$\sum_{\lambda_{n,0}<\lambda(p)} \delta_n^2 + \|w\|_{3,U(R_0)}^2 \leqq C(\|u\|_{1,U(R)}^2 + \|f\|_{1,U(R)}^2). \tag{3.17}$$

Auf die Einzelheiten des Beweises, der wie Satz 3.1 über Lemma 2.1 läuft, wollen wir verzichten. Man beachte jedoch, daß die Voraussetzung $\xi f \in H_0^1(U(R))$ erforderlich ist, denn daraus folgert man, daß für $f=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) E_n$ der Gradient ∇f eine in $L^2(U(R_1))^p$, $R_1<R$ konvergente Entwicklung

$$\nabla f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n' E_n \bar{e}_r + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-1}\alpha_n \nabla_\omega E_n$$

mit $\|\nabla f\|_{0,U(R_1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_1} r^{p-1}(|\alpha_n'|^2+\lambda_{n,0} r^{-2}|\alpha_n|^2)\, dr$ zuläßt. Ferner gilt $L_n a_n = -\alpha_n$, und man spaltet die Koeffizienten a_n nach Lemma 2.1 mit $\alpha=p+1$, $k=2$, $\alpha_1=p-1$, $k_1=1$ auf. Dieses Resultat kann man auch aus [4] herleiten.

Den folgenden Satz erhält man, wenn man Satz 3.1 auf den Teil E_0 anwendet, und den Teil ∇u, $u=\lambda^{-1}\Delta_0^{-1}(\operatorname{div} F)$ nach dem obigen Lemma zerlegt. Die Konstanten $\tilde{\delta}_0^i$ und die Reihenentwicklung für W_λ sind aus dieser Addition abzulesen.

3.3. Satz. *Sei* $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \neq 0$ *und sei* $E \in R^0(\Omega) \cap D(\Omega)$ *eine Lösung der Aufgabe* (1.1) *mit* $\operatorname{div} F \in H_0^1(\Omega)$. *Ferner seien die Voraussetzungen* (Vo 1)—(Vo 5) *erfüllt, und es gelte* $\lambda_{n,0} \neq 15/4$, $\lambda_{n,1} \neq 3/4$ *für alle* n. *Dann besitzt das Feld* E *in* $L^2(U(R_0))^3$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned} E = &\sum_{\lambda_{n,0}<15/4} r^{-3/2+(1+4\lambda_{n,0})^{1/2}/2}\left(\tilde{\delta}_n^1(\lambda) E_n^0 + \tilde{\delta}_n^2(\lambda) E_n^1\right) \\ &+ \sum_{\lambda_{n,1}<3/4} r^{-1/2+(1+4\lambda_{n,1})^{1/2}/2}\left(\tilde{\delta}_n^3 H_n^2\right) + \tilde{W}_\lambda \end{aligned} \tag{3.18}$$

mit $\tilde{W}_\lambda \in H^2(U(R_0))^3$ *derart, daß die Ungleichung*

$$\|\tilde{W}_\lambda\|^2_{2,U(R_0)} + \sum_{\lambda_{n,0}<15/4} (|\tilde{\delta}^1_n|^2 + |\tilde{\delta}^2_n|^2) + \sum_{\lambda_{n,1}<3/4} |\tilde{\delta}^3_n|^2 \leq C(\lambda)(\|E\|^2_{0,\Omega} + \|F\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} F\|^2_{1,\Omega}) \tag{3.19}$$

gilt.

Das magnetische Feld H besitzt im allgemeinen nicht so gute Regularitätseigenschaften wie E, weil H keine Randbedingungen zu erfüllen braucht. Eine — auch physikalisch motivierte — Randbedingung für H ist $n \cdot H|_\Gamma = 0$. Unter dieser Randbedingung kann man ähnliche Resultate für H herleiten. Auf diese Frage wollen wir aber nicht näher eingehen.

Literatur

[1] Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. - Van Nostrand Mathematica Studies 2. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey—Toronto—New York—London, 1965.

[2] Courant, R.: Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. - Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1923, Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1924, 81—84.

[3] Courant, R., and D. Hilbert: Methods of mathematical physics. Vol. I. - Interscience Publishers, Inc., New York, 1965.

[4] Kondrat'ev, V. A.: Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. - Trans. Moscow Math. Soc. 16, 227—313, 1967.

[5] Leis, R.: Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien. - Math. Z. 106, 1968, 213—224.

[6] Leis, R.: Zur Theorie der zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen. - Ber. Ges. Math. Datenverarb. Bonn 50, 1971,.

[7] Leis, R.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Bibliographisches Institut Mannheim, 1967.

[8] Mehra, M. L.: Zur asymptotischen Verteilung der Eigenwerte des Maxwellschen Randwertproblems. - Dissertation, Bonn, 1978.

[9] Picard, R.: Zur Theorie der zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen mit der Randbedingung $n(\nabla \times E) = n(\nabla \times H) = 0$ im homogenen, anisotropen Medium. - Bonn. Math. Schr. 65, 1973, 1—76.

[10] Picard, R.: Zur Theorie der harmonischen Differentialformen. - Sonderforschungsbereich 72 „Approximation und Optimierung", preprint 150, 1977.

[11] Rinkens, H.-D.: Zur Theorie der Maxwellschen Gleichungen in der Ebene. - Bonn. Math. Schr. 38, 1969, 1—49.

[12] Saranen, J.: Über das Verhalten der Lösungen der Maxwellschen Randwertaufgabe in Gebieten mit Kegelspitzen. - Math. Methods Appl. Sci. 2, 1980, 235—250.

[13] Saranen, J.: Finite element method for the electric field of Maxwell's boundary value problem in polygonal domains of plane. - Erscheint demnächst.

[14] Steinbach, E.: Singuläre Lösungen zu Randwertproblemen der Maxwellschen Gleichungen. - Diplomarbeit, Bonn, 1970.

[15] STRANG, G., and G. J. FIX: An analysis of the finite element method. - Prentice-Hall, Inc., Englewood Clifts, N. J., 1973.

[16] WECK, N.: Eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nichtglattem Rand. - Habilitationsschrift, Bonn, 1972.

[17] WECK, N.: Maxwell's boundary value problem on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries. - J. Math. Anal. Appl. 46, 1974, 410—437.

[18] WILCOX, C. H.: The steady-state diffraction of electromagnetic radiation by an obstacle in an homogeneous anisotropic conducting medium. - Arch. Rational Mech. Anal. 14, 1963, 326—336.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
Sammonkatu 6
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Eingegangen am 2. Januar 1980