Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 223, 1997, 475–506

DIFFÉOMORPHISMES DE p-DILATATION BORNÉE

Pierre Pansu

Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425
F-91405 Orsay, France; Pierre.Pansu@math.u-psud.fr

Résumé. On s'intéresse aux difféomorphismes entre variétés riemanniennes qui conservent les fonctions dont le gradient est dans L^p. On donne des restrictions et on construit des exemples de tels difféomorphismes entre groupes de Lie nilpotents et entre variétés à courbure négative.

Abstract. We consider diffeomorphisms between Riemannian manifolds which preserve functions whose gradient is in L^p. Obstructions to existence and examples of such maps are given, mainly between nilpotent Lie groups and negatively curved manifolds.

1. Motivation

Soit $f\colon M \to N$ un difféomorphisme entre variétés riemanniennes de même dimension n. Traditionnellement, la dilatation conforme de f en un point x de M est le quotient $|d_x f|^n / J_f(x)$. Etant donné $p > 0$, appelons *p-dilatation* de f en x le quotient $|d_x f|^p / J_f(x)$. Nous voyons les difféomorphismes de p-dilatation bornée comme un outil pour comparer des variétés riemanniennes non compactes.

Cette classe d'applications a été déjà considérée d'un autre point de vue. Suivant H. Royden [26], notons $\mathscr{A}_p(M)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur M dont le gradient (au sens des distributions) est dans $L^p(M)$. Alors un difféomorphisme de M sur N est de p-dilatation bornée si et seulement si il induit un opérateur borné de $\mathscr{A}_p(N)$ dans $\mathscr{A}_p(M)$.

A la suite de H. Royden, de nombreux auteurs se sont demandés dans quelle mesure l'algèbre $\mathscr{A}_p(M)$ déterminait M. Voici deux résultats typiques. Deux variétés riemanniennes M et N de même dimension n sont quasiconformes si et seulement si les algèbres $\mathscr{A}_n(M)$ et $\mathscr{A}_n(N)$ sont isomorphes (M. Nakai [19] si $n = 2$, L.G. Lewis [18] et J. Ferrand [3], voir aussi [31] et [7, Theorem 10]). En revanche, si $p \neq n$, un isomorphisme de $\mathscr{A}_p(M)$ et $\mathscr{A}_p(N)$ est induit par un homéomorphisme bilipschitzien.

Ces résultats conduisent à étendre aux homéomorphismes la notion de p-dilatation. Nous dirons qu'un homéomorphisme $M \to N$ a une *p-dilatation bornée* s'il induit un opérateur borné de $\mathscr{A}_p(N)$ dans $\mathscr{A}_p(M)$. Si $p = n$, on retrouve les homéomorphismes quasiconformes. Plus précisément, J. Ferrand [3] (voir aussi [27]) a montré que, si $p = n$, une application continue ouverte (non nécessairement injective) de M dans N envoie $\mathscr{A}_n(N)$ dans $\mathscr{A}_n(M)$ si et seulement si elle est quasirégulière et de degré borné.

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 31C45; Secondary 22E25, 30C65.

Travail réalisé dans le cadre du contrat "Geometric function theory and conformal geometry", HCM ERB CHRX CT92 0071 de l'Union Européenne.

Dans cet article, nous étudions la question de l'existence d'un homéomorphisme/difféomorphisme de p-dilatation bornée entre des variétés riemanniennes d'usage courant, par exemple, des espaces homogènes.

Il s'avère que la situation est assez différente suivant que $p > n$ ou que $p < n$. On énonce une obstruction qui est optimale dans le régime $p > n$, et dans une moindre mesure, lorsque $n - 1 < p < n$. En revanche, on ne sait rien dire si $p \leq n - 1$.

2. Principaux résultats

Une variété riemannienne est à *géométrie bornée* s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que chaque boule de rayon ε puisse être appliquée sur la boule unité euclidienne par un difféomorphisme bilipschitzien de constantes de Lipschitz bornées et envoyant centre sur centre.

Une *quasiisométrie* de M sur N est une application f dont l'image est C-dense et telle que

$$C^{-1}|x-y| - C \leq |f(x) - f(y)| \leq C(|x-y| + 1).$$

On dit qu'une variété riemannienne a une *dimension isopérimétrique* au moins égale à d si pour tout compact à bord lisse Δ de M,

$$\operatorname{vol}\Delta \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{vol}\Delta \leq \text{const.}\operatorname{vol}(\partial\Delta)^{d/d-1}.$$

Enfin, on dit que la croissance du volume est au plus polynomiale de degré ν si pour $r \geq 1$, $\operatorname{vol} B(x,r) \leq \text{const.}\, r^{\nu}$ où la constante est indépendante de x.

Dimension isopérimétrique et croissance du volume sont des invariants de quasiisométrie, dans la classe des variétés riemanniennes à géométrie bornée.

Théorème 1. *Soient M et N deux variétés riemanniennes de dimension n, à géométrie bornée. Supposons que M est de dimension isopérimétrique d. Alors pour $p \in]n,d[$, tout homéomorphisme de p-dilatation bornée $M \to N$ est une quasiisométrie. Si on suppose de plus que N est de dimension isopérimétrique $> n$, alors tout homéomorphisme de n-dilatation bornée (i.e., quasiconforme) de M sur N est une quasiisométrie.*

Sachant que si f est un difféomorphisme de p-dilatation bornée $(p > n-1)$ alors f^{-1} a une q-dilatation bornée, où $(1/q) + \big((n-1)/p\big) = 1$, on obtient

2.1. Corollaire. *Supposons M et N à géométrie bornée et N de dimension isopérimétrique d. Alors, pour $p \in \big](n-1)d/(d-1), n\big[$, tout difféomorphisme de p-dilatation bornée $M \to N$ est une quasiisométrie.*

Ainsi, la question de l'existence de difféomorphismes de p-dilatation bornée se ramène à celle, déjà abondamment étudiée (voir [9]), de l'existence de quasi-isométries.

Si M et N ne sont pas quasiisométriques (ce que l'on sait souvent décider, notamment lorsque M et N sont homogènes), la conclusion du théorème 1 devient : il n'existe pas de difféomorphisme de p-dilatation bornée de M sur N.

Ce résultat de non existence n'est pas loin d'être optimal. D'abord, les variétés simplement connexes à courbure négative ont une dimension isopérimétrique infinie. En général, il n'y aura pas de difféomorphismes de p-dilatation bornée entre elles, si $p > n-1$.

Théorème 2. *Soit M une variété simplement connexe de dimension n, à courbure négative. On suppose que M n'est pas quasiisométrique à l'espace hyperbolique H^n. Il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de M sur l'espace hyperbolique H^n si et seulement si $p \leq n-1$. Supposons que la courbure sectionnelle de M est δ-pincée. Alors pour tout $p \leq (n-1)\sqrt{\delta}$ il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de l'espace hyperbolique H^n sur M.*

Un groupe de Lie nilpotent de dimension n, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, a une dimension isopérimétrique égale à un entier d. Cet entier (qui est aussi le degré de croissance polynomiale du volume) est strictement supérieur à n, sauf si le groupe est abélien. Le degré de nilpotence est le plus petit entier r tel que tout commutateur r-uple soit trivial.

Théorème 3. *Soient G et G' des groupes de Lie nilpotents de dimension n, de dimension isopérimétrique d et d', et de degré de nilpotence r et r'. Alors pour tout $p \notin [d'/r', d]$, il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de G sur G' (relativement à des métriques* riemanniennes *invariantes à gauche*).

Le groupe de Heisenberg de dimension 3, noté Heis^3, a une dimension isopérimétrique égale à 4. Par conséquent, il n'existe pas de difféomorphisme de p-dilatation bornée de $\mathbf{R}^3$ sur Heis^3 pour $p \in \left]\frac{8}{3}, 3\right]$, il n'existe pas de difféomorphisme de p-dilatation bornée de Heis^3 sur $\mathbf{R}^3$ pour $p \in [3,4[$. Autrement dit, la question de l'existence d'un difféomorphisme de p-dilatation bornée $\mathbf{R}^3 \to \mathrm{Heis}^3$ est résolue sauf pour $p \in \left[2, \frac{8}{3}\right]$.

La question de savoir si la borne $p = d$ peut être atteinte est délicate. Le groupe de Heisenberg de dimension 3, noté Heis, a une dimension isopérimétrique égale à 4. On montrera en 9.7 qu'il existe un difféomorphisme non quasiisométrique de 4-dilatation bornée de Heis sur Heis. En revanche, on montrera en 6.12 qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de 4-dilatation bornée de Heis sur $\mathbf{R}^3$. Par conséquent, *il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de* Heis^3 *sur* $\mathbf{R}^3$ *si et seulement si $p \notin [3,4]$. Lorsque $p \geq 3$, il existe un difféomorphisme non quasiisométrique de p-dilatation bornée de* Heis^3 *sur* Heis^3 *si et seulement si $p \geq 4$.*

2.2. Interprétation. a. Il semble que, pour l'étude des variétés riemanniennes *ouvertes à l'infini*, i.e. satisfaisant l'inégalité isopérimétrique linéaire $\mathrm{vol}\,\Delta \leq \mathrm{const.}\,\mathrm{vol}(\partial\Delta)$, les homéomorphismes de p-dilatation bornée n'apportent rien d'utile. On verra toutefois aux paragraphes 4 à 7 que certains invariants construits au moyen de l'algèbre $\mathscr{A}_p$ ont un comportement intéressant même pour des variétés à courbure négative.

b. Le théorème 2 suggère que la notion d'homéomorphisme de p-dilatation bornée est flexible lorsque $p \leq n-1$. Cette impression est confirmée par l'étude des propriétés de régularité locale. V. Goldshtein, L. Gurov et A. Romanov ont observé qu'il existe pour $p < n-1$ des homéomorphismes de p-dilatation bornée dont l'inverse n'est pas lipschitzien (par conséquent, sa q-dilatation n'est bornée pour aucun $q > n$), [6, Example 3].

c. Les théorèmes 1 et 3 indiquent que dans la classe des variétés à croissance polynomiale, les homéomorphismes de p-dilatation bornée sont sensibles avant tout à la dimension isopérimétrique d. Le cas limite $p = d$ fait déjà intervenir des propriétés plus subtiles. On doit s'attendre à une théorie bien plus riche dans le régime $p < n$.

2.3. Organisation du texte. La méthode de preuve du théorème 1 n'est pas nouvelle. C'est un avatar de "théorèmes de distorsion" remontant à Koebe et Grötsch, [14]. On construit, en minimisant des intégrales $\int |du|^p$, un invariant asymptotique $\delta(x,y)$, fonction de deux points. Par construction, si $f\colon M \to N$ est de p-dilatation bornée, alors

$$(*) \qquad \delta^M(x,y) \leq K\, \delta^N\big(f(x), f(y)\big).$$

et on estime δ^M, δ^N par des puissances de la distance. Cela prouve que f^{-1} est (grossièrement) lipschitzienne. Comme $p > n$, f est lipschitzienne de toutes façons, donc f est une quasiisométrie.

On trouvera aux paragraphes 4 à 7 une discussion systématique de quatre invariants asymptotiques de ce type. On les teste notamment sur deux familles opposées de variétés riemanniennes, les groupes de Lie nilpotents gradués munis de métriques riemanniennes invariantes à gauche (de dimension isopérimétrique finie) et les variétés 1-connexes à courbure négative (de dimension isopérimétrique infinie). On a rassemblé au paragraphe 3 les informations nécessaires sur ces variétés riemanniennes. Les preuves des résultats de non-existence de difféomorphisme de p-dilatation bornée se trouvent en 5.14 et en 6.12.

Les exemples (th. 2 et 3) se trouvent aux paragraphes 8 et 9. Les exemples en courbure négative s'obtiennent en passant par l'espace euclidien. Dans un sens, l'application exponentielle de $\mathbf{R}^n$ dans H^n a une $(n-1)$-dilatation bornée. Inversement, on sait que H^n est conforme à une boule de $\mathbf{R}^n$. En demandant seulement que la p-dilatation soit bornée avec $p < n$, on peut rendre le rayon de la boule infini.

Le prototype de l'homéomorphisme quasiconforme non quasiisométrique de $\mathbf{R}^n$ est l'application $x \mapsto x|x|^{c-1}$, qui est homogène de degré c. La notion d'homéomorphisme homogène s'étend aux groupes nilpotents, tous nos exemples auront cette propriété. Dans le cas du groupe d'Heisenberg, on peut même construire une difféomorphisme de contact homogène, dont la 4-dilatation est bornée.

Enfin, on a rassemblé en 10 diverses questions ouvertes, et reporté dans un appendice un point technique concernant les métriques de Carnot–Carathéodory.

Remerciements. J'ai emprunté à J. Ferrand, non seulement la notion d'application de p-dilatation bornée (la classe $\mathscr{F}_p$ de [3]), mais aussi son point de vue sur les invariants construits au moyen de capacités. Je suis aussi reconnaissant à V. Goldshtein, J. Heinonen, S. Rickman et M. Troyanov de leur intérêt pour ce travail. Enfin, je remercie le referee pour ses nombreuses critiques constructives, et notamment pour avoir suggéré le corollaire 6.12.

3. Groupes de Lie nilpotents et variétés riemanniennes à courbure négative

Dans cette section, on rassemble des résultats connus sur les deux familles de variétés riemanniennes où nous puiserons des exemples, les groupes de Lie nilpotents et les variétés à courbure négative.

3.1. Graduation d'une algèbre de Lie nilpotente. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie. Elle est filtrée par la suite centrale descendante $\mathscr{G}_i$ où $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}$ et $\mathscr{G}_{i+1} = [\mathscr{G}, \mathscr{G}_i]$. Par définition, $\mathscr{G}$ est *nilpotente* s'il existe k tel que $\mathscr{G}_k = 0$. Le plus grand entier k tel que $\mathscr{G}_k \neq 0$ s'appelle le *degré de nilpotence* de $\mathscr{G}$.

On construit *l'algèbre de Lie graduée associée*

$$\mathrm{gr}\,\mathscr{G} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{G}_i / \mathscr{G}_{i+1}$$

munie du crochet induit par passage au quotient. Cette algèbre de Lie, de même dimension et de même degré de nilpotence que $\mathscr{G}$, possède un groupe à un paramètre canonique d'automorphismes (noté multiplicativement)

$$\varepsilon_t = t^i \qquad \text{sur } \mathscr{G}_i / \mathscr{G}_{i+1}.$$

3.2. Métrique de Carnot–Carathéodory sur un groupe de Lie nilpotent gradué. Un groupe de Lie G est dit nilpotent gradué si son algèbre de Lie $\mathscr{G}$ est nilpotente et isomorphe à son algèbre de Lie graduée associée. Si G est nilpotent mais non gradué, on note G_∞ le groupe de Lie (nilpotent gradué) dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$.

Un groupe de Lie nilpotent gradué possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_t = \exp \circ \varepsilon_t \circ \exp^{-1}$ qui est asymptotiquement homothétique au sens suivant : le rapport $|\delta_t(x) - \delta_t(y)|/t|x-y|$ tend vers 1 lorsque $|x-y|$ tend vers l'infini.

On s'attend donc à des propriété asymptotiques voisines de celles de l'espace euclidien. Elles se démontrent en remplaçant la métrique riemannienne par une métrique plus grande, mais exactement homogène sous le groupe à un paramètre d'automorphismes δ_t.

3.3. Définition. Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué, et notons ε_t les dilatations sur l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{V} \subset \mathscr{G}$ le sous-espace sur lequel $\varepsilon_t = t$. Notons ξ le champ de plan invariant à gauche sur G engendré par $\mathscr{V}$. Soit x, $y \in G$. La *distance de Carnot–Carathéodory* $d^c(x,y)$ est la borne inférieure des longueurs des courbes de x à y partout tangentes au champ de plan ξ.

3.4. Comportement asymptotique de la distance. Sur les grandes distances, métrique riemannienne et métrique de Carnot–Carathéodory sont équivalentes,

$$\lim_{|x-y|\to+\infty} \frac{|x-y|}{d^c(x,y)} = 1.$$

Dans une certaine mesure, cette remarque s'applique aussi au cas non gradué. Fixons un isomorphisme d'espaces vectoriels i de $\mathscr{G}$ sur $\operatorname{gr}\mathscr{G}$ qui préserve la filtration centrale descendante et induit l'identité sur les quotients $\mathscr{G}_i/\mathscr{G}_{i+1}$. Munissons G et G_∞ de métriques invariantes à gauche telles que à l'origine i soit une isométrie. Notons $j\colon G \to G_\infty$ le difféomorphisme $j = \exp_\infty \circ i \circ \exp^{-1}$. On a alors [20]

$$\lim_{|x-y|\to+\infty} \frac{|x-y|}{d^c\big(e, j(x^{-1}y)\big)} = 1.$$

3.5. Volumes et normes L^p. La mesure de Haar est homogène de degré $d = \sum_i \dim \mathscr{G}_i$ sous les δ_t. C'est la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle pour la distance de Carnot–Carathéodory.

Il en résulte que le volume des boules riemanniennes dans G croît polynomialement : $\operatorname{vol} B(R) \sim \text{const.}\, R^d$.

Si u est une fonction sur le groupe G, on peut mesurer la norme de sa différentielle par rapport à la métrique de Carnot–Carathéodory : c'est simplement la norme de sa restriction au champ de plans ξ, $|du|_c = |du_{|\xi}|$.

On a alors des inégalités de Sobolev [30]. Pour u lisse à support compact sur G et p, q tels que $1/p = (1/q) + (1/d)$,

$$\|u\|_q \leq \text{const.}\, \|\, |du|_c \|_p.$$

L'inégalité de Sobolev pour $p = 1$ entraîne que la dimension isopérimétrique de G est d.

Pour $p > d$, cette inégalité est remplacée par le théorème de plongement de Sobolev–Hölder $L_1^p \subset C^{1-(d/p)}$ pour la métrique de Carnot–Carathéodory ([10, section 2.4.A).

3.6. Courbure négative. On se limitera aux variétés simplement connexes dont la courbure sectionnelle K varie entre deux constantes strictement négatives. On dira que la courbure est *δ-pincée* si $-1 \leq K \leq -\delta$.

Dans une telle variété, on dispose de coordonnées polaires globales dans lesquelles la métrique de s'écrit $dr^2 + g_r$ où, d'après le théorème de comparaison de

Rauch, $\big(\sinh(\sqrt{\delta}\,r)/\sqrt{\delta}\big)^2 d\theta^2 \le g_r \le \sinh(r)^2 d\theta^2$. Il en résulte que la croissance du volume est exponentielle. Plus précisément, on a

$$\frac{2}{\tanh(r)}d\theta^2 \le \frac{\partial g_r}{\partial r} \le \frac{2\sqrt{\delta}}{\tanh(\sqrt{\delta}\,r)}d\theta^2$$

et cela entraîne une inégalité isopérimétrique linéaire, [35]. En particulier, la dimension isopérimétrique est infinie.

Pour les fonctions lisses à support compact, on a l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_p \le \text{const.}\, \|du\|_p.$$

pour tout $p \ge 1$.

Pour certaines valeurs de p, cette inégalité est même satisfaite sans restriction sur le support de u. On dit alors que la cohomologie $L^{p,p}$ de M en degré 1 s'annulle.

3.7. Cohomologie $L^{p,q}$. La cohomologie $L^{p,q}$ en degré 1, $L^{p,q}H^1$, d'une variété riemannienne est le quotient des 1-formes fermées L^p par les différentielles de fonctions L^q. L'annulation de $L^{p,q}H^1$ est une hypothèse plus forte que l'inégalité de Sobolev ou l'inégalité isopérimétrique. Elle entraîne que, pour toute fonction continue u dont le gradient au sens des distributions est L^p (i.e., pour toute fonction de $\mathscr{A}_p$), il existe une fonction v telle que $du = dv$ et

$$(**) \qquad \|v\|_{L^q} \le \text{const.}\, \|du\|_{L^p}$$

sans restriction sur le support de u.

Suivant [23], notons $\mathbf{p}(M)$ la borne supérieure des q tels que la cohomologie $L^{q,q}$ de M en degré 1 s'annulle pour tout $q \in [1, p]$. Pour l'espace hyperbolique (courbure constante -1), $\mathbf{p}(H^n) = n-1$. Si la courbure est δ-pincée (i.e., comprise entre -1 et $-\delta < 0$), on a $\mathbf{p} \ge (n-1)\sqrt{\delta}$. D'après [23], pour tous les espaces homogènes à courbure sectionnelle strictement négative *de type semi-simple*, à l'exception de l'espace hyperbolique, $\mathbf{p}(M) > n-1$. On a même souvent $\mathbf{p}(M) > n$.

4. L'invariant de Hölder

4.1. Définition. L'invariant de *Hölder* est la fonction de deux points

$$h_p(x,y) = \inf\Big\{\int |du|^p \mid u \in \mathscr{A}_p,\ u(x) = 1,\ u(y) = 0\Big\}.$$

4.2. Cas euclidien. Le théorème de plongement de L_1^p dans $C^{1-(n/p)}$ (inégalité de Sobolev–Hölder) s'énonce comme suit (voir [1]). Pour tout $p > n$, il existe une constante const.(n,p) telle que, pour toute boule B de $\mathbf{R}^n$, pour toute fonction $u \in \mathscr{A}_p(B)$ et tous points x et y de la boule concentrique de rayon moitié,

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{const.}(n,p)\left(\int_B |du|^p\right)^{1/p} |x-y|^{1-(n/p)}.$$

Il entraîne que si $p > n$, $h_p > 0$. Par homogénéïté, on en déduit que $h_p(x,y) = \text{const.}\,|x-y|^{n-p}$. Ceci, avec la propriété d'invariance $(*)$, entraîne immédiatement qu'un homéomorphisme de p-dilatation bornée, $p > n$, est lipschitzien ([32]).

4.3. Propriétés générales. Dans les estimations qui suivent, $|x-y|$ est supposé suffisamment grand.

4.4. Proposition. *$h_p = 0$ si $p \leq n$.*

En effet, si $p \leq n$, une fonction de L_1^p n'est pas nécessairement continue. Les contre-exemples euclidiens (locaux) peuvent être transportés sur toute variété riemannienne. □

4.5. Proposition. *Si M est à géométrie bornée, h_p est borné supérieurement, i.e., $|x-y| \geq 1 \Rightarrow h_p(x,y) \leq \text{const.}$*

Si M est à géométrie bornée, la fonction $u(z) = \max\{0, 1-|z-x|\}$ est admissible pour la définition de h_p et donne $h_p(x,y) \leq$ const. dès que $|x-y| \geq 1$. □

4.6. Proposition. *Si M est à géométrie bornée et si $p > n$, alors*

$$h_p(x,y) \geq \text{const.}|x-y|^{1-p}$$

(comme en dimension 1).

Si M est à géométrie bornée, pour tout x, $y \in M$ tels que $|x-y| = R$, il existe un difféomorphisme bilipschitzien d'un voisinage du segment géodésique $[x,y]$ sur le produit $T_R = [0,R] \times [0,\varepsilon]^{n-1}$. Cela ramène au calcul de h_p sur T_R. Soit u une fonction qui vaut 0 en $(0,0)$ et 1 en $(R,0)$. Supposons $p > n$. L'inégalité de Sobolev–Hölder euclidienne entraîne que $u \leq \frac{1}{3}$ sur $0 \times [0,\varepsilon]^{n-1}$ et $u \geq \frac{2}{3}$ sur $R \times [0,\varepsilon]^{n-1}$ (quitte à diminuer ε). Par conséquent, $\int |du|^p$ est minoré par la p-capacité du condensateur T_R, proportionnelle à R^{1-p}. □

4.7. Proposition. *Si M a une croissance du volume au plus polynomiale de degré ν, et si $p > \nu$, alors $h_p(x,y) \leq \text{const.}|x-y|^{\nu-p}$.*

Supposons que M a une croissance du volume au plus polynomiale de degré ν. Supposons $p > \nu$. Soit x, $y \in M$ tels que $|x-y| = 2R$. Soit u la fonction telle que $u(z) = 2 - (|z-y|/R)$ sur $B(y,2R) - B(y,R)$, $u = 0$ hors de $B(y,2R)$, $u = 1$ sur $B(y,R)$. Alors pour $R \geq 2$, on trouve $\int |du|^p \leq \text{const.}\,R^{\nu-p}$, d'où la majoration annoncée. □

4.8. Proposition. *Si $p > n$, si M est à géométrie bornée et si la cohomologie $L^{p,q}$ en degré 1 est nulle ($L^{p,q}H^1(M) = 0$, voir en 3.7), alors h_p est borné inférieurement.*

Supposons que $L^{p,q}H^1(M) = 0$. Soit u une fonction qui vaut 0 en x et 1 en y. Soit v la fonction telle que $du = dv$ et qui satisfait $(**)$. En l'un des points x ou y, on a $|v| \geq \frac{1}{2}$. Supposons de plus que M est à géométrie bornée. Alors l'inégalité de Sobolev–Hölder euclidienne se transporte localement dans M. Elle entraîne que, si $\|du\|_{L^p}$ est petit (plus petit qu'une constante η ne dépendant que de M), alors $v \geq \frac{1}{4}$ sur une boule de rayon $\varepsilon(M)$ indépendant de x. En particulier, $\|v\|_{L^q} \geq \eta'$ et on obtient une minoration $\|du\|_{L^p} \geq \eta''$. Par conséquent, $h_p \geq \min\{\eta, \eta''\}^p$. □

4.9. Cas des groupes de Lie nilpotents gradués.

4.10. Proposition. *Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué de dimension n et de dimension isopérimétrique d. Si $p > d$, alors*

$$h_p(x,y) \sim |x-y|^{d-p}.$$

En revanche, si $n < p < d$, h_p est borné inférieurement et supérieurement, $h_p \sim 1$.

L'idée est de remplacer la métrique riemannienne par la métrique de Carnot–Carathéodory. On utilise le gradient horizontal $|du|_c$ défini en 3.5 et on pose

$$h_p^c(x,y) = \inf\left\{\int |du|_c^p \mid u(x) = 1,\ u(y) = 0\right\}.$$

Cette fonction est exactement homogène de degré $d-p$ sous δ_t. On a $h_p^c \leq h_p$.

Si $p > d$, on a un plongement $L_1^p \subset C^{1-(d/p)}$ pour la métrique de Carnot–Carathéodory ([10, section 2.4.A]) donc $h_p^c(x,y) = \text{const.}\, d^c(x,y)^{d-p}$ et $h_p(x,y) \geq \text{const.}\, |x-y|^{d-p}$. Cela résulte aussi de la proposition 4.11. Inversement, la croissance polynomiale du volume entraîne (4.7) $h_p^c(x,y) \leq \text{const.}\, |x-y|^{d-p}$ donc on trouve $h_p \sim |x-y|^{d-p}$ si $p > d$.

Si $n < p < d$, on montre que h est bornée inférieurement. D'après le plongement Sobolev–Hölder riemannien, on peut remplacer $h_p(x,y)$ par

$$h_{p,\varepsilon}(x,y) = \inf\left\{\int |du|^p \mid u\big(B(x,\varepsilon)\big) = 1,\ u\big(B(y,\varepsilon)\big) = 0\right\}$$

puis par sa variante Carnot–Carathéodory

$$h_{p,\varepsilon}^c(x,y) = \inf\left\{\int |du_{|\xi}|^p \mid u\big(B(x,\varepsilon)\big) = 1,\ u\big(B(y,\varepsilon)\big) = 0\right\}.$$

Noter que ces deux nombres sont non nuls même si $p \leq n-1$.

4.11. Proposition. *Soit G un groupe nilpotent gradué de dimension n et de dimension isopérimétrique d, muni d'une métrique de Carnot–Carathéodory invariante à gauche. Il existe une constante l ayant la propriété suivante. Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux points de G situés à distance R de l'origine e. Soit M la variété (non complète) $M = B(e,2R) \setminus B(e,lR)$. Alors l'invariant de Hölder relatif à M satisfait*

$$\text{si } p < d, \quad h_{p,\varepsilon}^{M,c}(x,y) \geq \mathrm{const.}(\varepsilon), \qquad \text{si } p > d, \quad h_{p,\varepsilon}^{M,c}(x,y) \geq \mathrm{const.}\, R^{d-p},$$

et si $p = d$, $h_{d,\varepsilon}^{M,c}(x,y) \geq \mathrm{const.}\big(\log(R/\varepsilon)\big)^{1-d}$.

Ces estimées sont prouvées en appendice.

En translatant pour amener à l'origine le milieu d'un segment géodésique reliant x à y, on déduit de la proposition 4.11 une borne inférieure sur $h_{p,\varepsilon}^{G,c}(x,y)$. Lorsque $|x-y|$ est grand, on peut remplacer distance riemannienne par distance de Carnot–Carathéodory, et on obtient une borne inférieure sur $h_p^G(x,y)$. □

4.12. Courbure négative. En courbure négative, si p est assez grand, l'inégalité 4.6 est optimale. En revanche, si p est petit (la borne est l'invariant $\mathbf{p}(M)$ lié à la cohomologie L^p introduit en 3.7), h_p est borné inférieurement.

4.13. Proposition. *Soit M une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative δ-pincée, i.e., qui varie entre -1 et $-\delta < 0$. Si $p > n - 1/\sqrt{\delta}$, alors $h_p \sim |x-y|^{1-p}$. Inversement, si $n < p < \mathbf{p}(M)$, alors $h_p \sim 1$.*

Supposons $p > (n-1)/\sqrt{\delta}$, et construisons une fonction test u pour les points x et y. On utilise les coordonnées cylindriques (ϱ, θ, z) où ϱ est la distance à la géodésique passant par x et y, z l'abscisse de la projection sur cette géodésique, $\theta \in S^{n-2}$ un angle. Soit $R = |x-y|$. Posons $u(\varrho,\theta,z) = z/R$ si $0 \leq z \leq R$, $u = 0$ ou 1 sinon. L'hypothèse sur la courbure donne un encadrement de la métrique ds^2

$$\frac{\cosh(\varrho\sqrt{\delta}\,)^2}{\delta} dz^2 + d\varrho^2 + \frac{\sinh(\varrho\sqrt{\delta}\,)^2}{\delta} d\theta^2 \leq ds^2 \leq \cosh(\varrho)^2 dz^2 + d\varrho^2 + \sinh(\varrho)^2 d\theta^2.$$

Il vient

$$|du| \leq \frac{\sqrt{\delta}}{R\cosh(\varrho\sqrt{\delta}\,)} \sim R^{-1} e^{-\sqrt{\delta}\varrho}$$

alors que le volume du cylindre de hauteur R et de rayon ϱ est au plus

$$R\cosh(\varrho)\sinh(\varrho)^{n-2} \sim R\, e^{(n-1)\varrho}.$$

Si $p > (n-1)/\sqrt{\delta}$, on voit que $du \in L^p$ et que

$$\int |du|^p \leq \mathrm{const.}\, R^{1-p}.$$

Avec la borne inférieure générale 4.6, on conclut que $h_p(x,y) \sim |x-y|^{1-p}$.

Les bornes sur h_p pour p petit résultent de 4.5 et 4.8. □

5. L'invariant de Grötsch

5.1. Définition. L'invariant de *Grötsch* $g_p(x,y)$ est la borne inférieure des intégrales $\int |du|^p$ où u décrit les fonctions de $\mathscr{A}_p$ à support compact qui prennent la valeur 1 sur un compact connexe contenant x et y.

C'est cet invariant qui intervient dans la preuve du théorème 1, voir 5.14.

5.2. Cas euclidien.

5.3. Proposition. *Pour l'espace* $\mathbf{R}^n$, $g_p > 0$ *seulement pour* $n-1 < p < n$, *et alors* $g_p(x,y) = \text{const.}\,|x-y|^{n-p}$.

Remarque. Ceci, avec la propriété d'invariance $(*)$, entraîne immédiatement qu'un homéomorphisme de p-dilatation bornée pour un $n-1 < p < n$ a une réciproque f^{-1} lipschitzienne.

Les arguments (cas où $p = n$) sont classiques, voir par exemple [29]. La fonction g_p est homogène de degré $n-p$ est c'est une fonction strictement croissante de $|x-y|$. Par conséquent, $g_p = 0$ si $p \geq n$.

Supposons $p < n-1$. Soit σ un segment de droite de $\mathbf{R}^n$. Les fonctions test $u_\alpha(z) = 1 - d(z,\sigma)^\alpha$ sont à support compact, valent 1 sur σ, et $\int |du_\alpha|^p$ tend vers 0 lorsque α tend vers 0. Ceci montre que $g_p = 0$ si $p < n-1$. Si $p = n-1$, on définit u_α comme suit. $u_\alpha(z) = \alpha \log d(z,\sigma)$ lorsque $\varrho = d(z,\sigma)$ est dans l'intervalle $]e^{-1/\alpha}, 1[$, $u_\alpha(z) = 1$ si $\varrho \leq e^{-1/\alpha}$, $u_\alpha(z) = 0$ si $\varrho \geq 1$. La conclusion est la même.

Le fait que $g_p > 0$ si $n-1 < p < n$ résulte de l'inégalité isopérimétrique, c'est un cas particulier de 5.8. Par homogénéïté, on en déduit que $g_p(x,y) = \text{const.}\,|x-y|^{n-p}$. □

5.4. Propriétés générales.

5.5. Proposition. $g_p = 0$ *si* $p \leq n-1$.

Si $p \leq n-1$, les fonctions test euclidiennes u_α peuvent être transportées le long d'un arc compact C^1 d'une variété riemannienne, d'où $g_p = 0$ si $p \leq n-1$. □

5.6. Proposition. *Si M est à géométrie bornée, alors pour* $p > n-1$,

$$g_p(x,y) \leq \text{const.}(|x-y|+1).$$

Supposons M à géométrie bornée. Etant donné x, $y \in M$, fixons un segment géodésique σ reliant x à y, et notons v la fonction distance à σ. Posons $u(z) = \max\{0, 1 - v(z)/\varepsilon\}$. Alors $\int |du|^p$ est le volume du voisinage tubulaire de largeur ε de σ, proportionnel à la longueur de σ, d'où la majoration annoncée. □

5.7. Proposition. *Si M a une croissance du volume polynomiale de degré* ν, *alors* $g_p(x,y) \leq \text{const.}\,|x-y|^{\nu-p}$.

Posant $R = |x-y|$, utiliser la même fonction test que pour 4.7. □

5.8. Proposition. *Si M est à géométrie bornée et a une dimension isopérimétrique égale à d, alors $g_p(x,y) \geq \mathrm{const.}\, |x-y|^{1-(p/d)}$ pour $n-1<p<d$.*

L'assertion 5.8 est prouvée dans [21] dans le cas où $p=n$. Rappelons brièvement l'argument. Classiquement, l'inégalité isopérimétrique entraîne l'inégalité de Sobolev : pour u à support compact et $p<d$,

$$\|u\|_{pd/(d-p)} \leq \mathrm{const.}\, \|du\|_p.$$

Soit C un connexe contenant deux points x et y, et u une fonction à support compact telle que $u=1$ sur C. Montrons que $u \geq \frac{1}{2}$ sur un voisinage tubulaire de C. Si $p>n$, cela résulte du plongement Sobolev–Hölder local (et de l'hypothèse de géométrie bornée). Si $n-1<p\leq n$, on invoque un argument classique, voir par exemple [5]. On se ramène d'abord au cas où u est "monotone au sens de Lebesgue", i.e., satisfait au principe du maximum, voir [17]. Ensuite, on utilise la positivité de la capacité de deux connexes non triviaux.

5.9. Lemme. *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Il existe des constantes $\delta>0$ et $\varepsilon>0$ ayant la propriété suivante. Soit C un connexe de diamètre $>\varepsilon$, u une fonction de $L_1^p(M)$ qui vaut 1 sur C, et qui est monotone au sens de Lebesgue sur $M\setminus C$. Si dans une boule centrée sur C on a $\int |du|^p<\delta$, alors $u\geq \frac{1}{2}$ sur la boule concentrique de rayon moitié.*

Preuve du lemme. Dans la boule unité de $\mathbf{R}^n$, pour $p>n-1$, la p-capacité de deux connexes C' et C'' est non nulle. Plus précisément, il existe une constante $\delta_0>0$ telle que, si C' et C'' sont des connexes de la boule unité, de diamètre $\geq \frac{1}{2}$, alors pour toute fonction u telle que $u=0$ sur C' et $u=1$ sur C'', $\int |du|^p > \delta_0$.

Dans une variété M à géométrie bornée, on a la même inégalité dans les boules de rayon $\varepsilon>0$, avec une constante δ_M. Soit C un connexe de M de diamètre $>\varepsilon$ et soit B une boule de rayon ε centrée en un point de C. Soit X une composante connexe de $\left\{u<\frac{1}{2}\right\}\cap B$. Si le diamètre de X est au moins $\frac{1}{2}\varepsilon$, alors $\int |du|^p > \delta = 2^{-p}\delta_M$. Par conséquent, si $\int |du|^p<\delta$, toute composante connexe X de $\left\{u<\frac{1}{2}\right\}\cap B$ a un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. D'après le principe du maximum, l'adhérence de X n'est pas contenue dans B, donc rencontre le bord ∂B. Par conséquent, X ne rencontre pas la boule concentrique B' de rayon $\frac{1}{2}\varepsilon$. On conclut que $u\geq\frac{1}{2}$ sur B'. □

Si $n-1<p\leq n$, voici comment terminer la preuve de la proposition 5.8. On peut recouvrir le voisinage tubulaire de largeur $\frac{1}{2}\varepsilon$ de C par deux ensembles A et B, où

(i) A est la réunion des boules centrées sur C telles que $\int_{B(z,\varepsilon)} |du|^p \geq \frac{1}{2}\delta$. On a $\int_A |du|^p \geq \mathrm{const.}\,\mathrm{vol}(A)$, car le volume des boules de rayon $\frac{1}{2}\varepsilon$ dans M est uniformément minoré.

(ii) B est la réunion des boules centrées sur C telles que $\int_{B(z,\varepsilon)} |du|^p < \frac{1}{2}\delta$. Sur B, $u\geq\frac{1}{2}$ et $\int_B |u|^{pd/(d-p)} \geq \mathrm{const.}\,\mathrm{vol}(B)$.

Avec l'inégalité de Sobolev, il vient

$$\int |du|^p + \left(\int |du|^p\right)^{d/(d-p)} \geq \text{const.}\, |x-y|$$

et enfin

$$g_p(x,y) \geq \text{const.}\, |x-y|^{1-(p/d)}. \ \square$$

5.10. Groupes nilpotents gradués.

5.11. Proposition. *Dans un groupe nilpotent gradué de dimension isopérimétrique d, on a, pour $d-1<p<d$, $g_p \sim |x-y|^{d-p}$.*

Dans un groupe nilpotent gradué de dimension isopérimétrique d, le lemme 5.9 est vrai pour les métriques de Carnot–Carathéodory avec n remplacé par d. En effet, on n'a besoin que de la positivité de la p-capacité de deux connexes, celle-ci a été établie récemment pour $p=d$ par J. Heinonen et P. Koskela, [13] (des cas particuliers sont dus à M. Reimann [24], [15], et M. Gromov [9]). Leur argument s'étend immédiatement au cas où $d-1<p<d$ (P. Koskela). Par conséquent, on a l'inégalité $g_p \sim |x-y|^{d-p}$. $\square$

5.12. Courbure négative.

5.13. Proposition. *Pour les variétés 1-connexes à courbure négative, $g_p \sim |x-y|$ pour tout $p>n-1$.*

En effet la dimension isopérimétrique est infinie, donc en combinant 5.6 et 5.8, on obtient $g_p \sim |x-y|$.

5.14. Preuve du théorème 1. D'après 4.2, si $p>n$, f est localement lipschitzienne, la norme de la différentielle est bornée, donc f est globalement lipschitzienne (voir aussi [3, Théorème 10.1], et [6, Theorem 1.2]).

Pour contrôler f^{-1}, on utilise l'invariant de Grötsch. Soit d la dimension isopérimétrique de M. D'après 5.6, $g^N \leq \text{const.}(|x-y|+1)$ et d'après 5.8, $g^M \geq \text{const.}\, |x-y|^{1-p/d}$. Avec la propriété d'invariance $(*)$, si f est de p-dilatation bornée : $M \to N$ avec $n<p<d$, on voit (en particulier) qu'il existe deux constantes c et c' telles que

$$|x-y| = c \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq c',$$

et cela suffit pour conclure que f est une quasiisométrie.

5.15. Remarque. Si $p=n$, l'estimation de f^{-1} subsiste. En échangeant M et N (ce qui nécessite l'hypothèse plus forte), on conclut à nouveau que f est une quasiisométrie.

6. L'invariant de Teichmüller

6.1. Définition. L'invariant de *Teichmüller* $t_p(x,y)$ est la borne inférieure des intégrales $\int |du|^p$ où u décrit les fonctions de $\mathscr{A}_p$ qui s'annulent (respprennent la valeur 1) sur un connexe reliant x (resp. y) à l'infini.

6.2. Cas euclidien.

6.3. Proposition. *Pour l'espace euclidien* $\mathbf{R}^n$, $t_p = 0$ *pour* $p \leq n-1$, $t_p = +\infty$ *pour* $n-1 < p \leq n$, *et pour* $p > n$, $t_p(x,y) = \mathrm{const.}\,|x-y|^{n-p}$.

En effet, t_p est homogène de degré $n-p$ et c'est une fonction strictement décroissante de $|x-y|$. Par conséquent, il est nul ou infini pour $p \leq n$. Si $n-1 < p \leq n$, il est non nul, donc infini.

Pour $p > n$, $t_p(x,y)$ est non nul, et fini (prendre une fonction test qui en coordonnées polaires ne dépend que de l'angle polaire) donc proportionnel à $|x-y|^{n-p}$.

Supposons $p < n-1$. Soit l une demi-droite de $\mathbf{R}^n$, notons ϱ la distance à l. Soit α une fonction sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs strictement positives, et telle que α et sa dérivée α' soient dans $L^p(\mathbf{R}_+)$. Pour $z \in \mathbf{R}^n$, notons s l'abscisse de sa projection sur l et posons $v_\alpha(z) = \max\{0, 1-\varrho(z)^{\alpha(s)}\}$. Alors $dv_\alpha \in L^p$, v_α prend la valeur 1 sur l et s'annulle en dehors d'un voisinage tubulaire de l. Ceci montre que $t_p < +\infty$ et donc que $t_p = 0$.

Enfin, si $p = n-1$, on modifie v_α comme suit. $v_\alpha(z) = \alpha(s)\log d(z,\sigma)$ lorsque $\varrho = d(z,\sigma)$ est dans l'intervalle $]e^{-1/\alpha(s)}, 1[$, $v_\alpha(z) = 1$ si $\varrho \leq e^{-1/\alpha(s)}$, $v_\alpha(z) = 0$ si $\varrho \geq 1$. La condition pour que $dv_\alpha \in L^{n-1}$ est $\alpha \in L^{n-2}(\mathbf{R}_+)$ et $\alpha' \in L^{n-1}(\mathbf{R}_+)$ dans ce cas. □

6.4. Propriétés générales.

6.5. Proposition. $t_p \geq h_p$.

Immédiat. □

6.6. Proposition. *Si M est non compacte, à géométrie bornée, alors $t_p = 0$ pour $p \leq n-1$.*

Soit M une variété riemannienne complète non compacte. Il existe un rayon géodésique, i.e., une courbe l isométrique à une demi-droite. Si M est à géométrie bornée, il existe un voisinage tubulaire de l difféomorphe (avec des constantes de Lipschitz bornées) au voisinage tubulaire d'une demi-droite de $\mathbf{R}^n$. On peut transplanter la fonction v_α de 6.3 dans M et conclure que $t_p < \infty$ pour $p \leq n-1$. En fait, en prenant la fonction α de plus en plus petite, on montre que $t_p = 0$. □

6.7. Proposition. *Si M est à géométrie bornée, $p > n-1$ et si la cohomologie $L^{p,q}H^1(M)$ s'annulle, alors $t_p = +\infty$.*

Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée dont la cohomologie $L^pH^1(M)$ s'annulle. On a montré en 4.8 que, sous ces hypothèses, l'invariant de Hölder h_p est borné inférieurement. Si $p > n$, le même argument montre que $t_p = +\infty$. Si $n-1 < p \leq n$, on doit pour arriver à la même conclusion, invoquer le lemme 5.9.

6.8. Groupes nilpotents gradués.

6.9. Proposition. *Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué de dimension n et de dimension isopérimétrique d. Pour $n-1 < p \leq d$, on a $t_p = +\infty$. Pour $p > d$, $t_p \geq \mathrm{const.}\, |x-y|^{d-p}$.*

Montrons que, pour $n-1 < p < d$, $t_p = +\infty$. Soient x, $y \in G$ et C et C' deux connexes reliant x (resp. y) à l'infini, et u une fonction qui vaut 1 sur C et 0 sur C'. De nouveau, on utilise le lemme 5.9 pour se ramener au cas où C et C' sont épais (contiennent un voisinage de largeur ε d'une courbe qui tend vers l'infini). Plaçons l'origine en x, posons $R = |x-y|$. Soit l la constante qui apparaît dans la proposition 4.11. Posons $L = 2/l$. Considérons les sphères concentriques $\partial B(x, L^kR)$. Chacune rencontre C et C' en des points x_k et y_k. Comme les couronnes $M_k = B(x, 2\, L^kR) \backslash B(x, l\, L^kR)$ sont deux à deux disjointes, on a

$$\int |du|^p \geq \sum_k h_{p,\varepsilon}^{M_k}(x_k, y_k) = +\infty,$$

car, d'après la proposition 4.11, $h_{p,\varepsilon}^{M_k}(x_k, y_k) \geq \mathrm{const.}$

Supposons que $p > d$. D'après 6.5 et 4.10,

$$t_p(x,y) \geq h_p(x,y) \geq \mathrm{const.}\, |x-y|^{d-p}.$$

Lorsque $p = d$, on utilise l'invariant de Teichmüller t_d^c relatif à métrique de Carnot–Carathéodory. Comme $t_d \geq t_d^c$, il suffit de montrer que $t_d^c = +\infty$. Cela résulte immédiatement du lemme suivant (suggéré par le referee). ▫

6.10. Terminologie. Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué de dimension isopérimétrique d, muni d'une métrique de Carnot–Carathéodory invariante à gauche. Soit M un ouvert de G, soient F_0 et F_1 des parties fermés de M. Une fonction $u \in \mathscr{A}_p(M)$ est dite *admissible* si elle est à valeurs dans $[0,1]$ et vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1. On note $\mathrm{cap}^c(M, F_0, F_1)$ la *capacité*, i.e., la borne inférieure des intégrales $\int_M |du|_c^d$ (voir 3.5) où u décrit les fonctions admissibles sur M.

6.11. Lemme. *Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué de dimension isopérimétrique d. Soit $M = B(x, LR) \backslash B(x, R)$ une couronne, soient F_0 et F_1 des parties fermées de M qui relient $\partial B(x, LR)$ à $\partial B(x, R)$. Alors $\mathrm{cap}^c(M, F_0, F_1) > \eta(L) > 0$ pour L assez grand.*

Preuve du lemme. On utilise le résultat principal de [12] : Si E_1 relie x à $\partial B(x,R)$ et E_0 relie $\partial B(x,R)$ à l'infini, alors $\operatorname{cap}^c(G,E_0,E_1) \geq \delta > 0$ où δ ne dépend que de la métrique de Carnot–Carathéodory. Clairement, lorsque L tend vers $+\infty$, la capacité $\operatorname{cap}^c\big(G,B(x,1),G\setminus B(x,L)\big)$ tend vers 0. Choisissons L de sorte que $\operatorname{cap}^c\big(G,B(x,1),G\setminus B(x,\sqrt{L}\,)\big) < 4^{-d}\delta$. Posons $\lambda=\sqrt{L}$. Soient F_0 et F_1 des parties fermées de $M=B(x,LR)\setminus B(x,R)$ qui relient $\partial B(x,LR)$ à $\partial B(x,R)$. Notons

$$D_0=B(x,R),\quad D_1=G\setminus B(x,\lambda R),\quad C_0=B(x,\lambda R),\quad D_1=G\setminus B(x,LR),$$

de sorte que $\operatorname{cap}^c(G,D_0,D_1)=\operatorname{cap}^c(G,C_0,C_1)<4^{-d}\delta$.

Soit u une fonction admissible pour (M,F_0,F_1), v une fonction admissible pour (G,D_0,D_1) et w une fonction admissible pour (G,C_0,C_1). Alors la fonction $t=(1-w)(1-uv)$ est admissible pour (G,E_0,E_1) où $E_0=\big(F_1\setminus B(x,\lambda R)\big)\cup\big(G\setminus B(x,LR)\big)$ relie $\partial B(x,\lambda R)$ à l'infini et $E_1=\big(B(x,R)\cup F_0\big)\cap B(x,\lambda R)$ relie $\partial B(x,\lambda R)$ à x. Comme $|dt|\leq|du|+|dv|+|dw|$, il vient

$$\begin{aligned}\delta^{1/d} &< \operatorname{cap}^c(G,E_0,E_1)^{1/d}\\ &\leq \operatorname{cap}^c(M,F_0,F_1)^{1/d}+\operatorname{cap}^c(G,D_0,D_1)^{1/d}+\operatorname{cap}^c(G,C_0,C_1)^{1/d}\\ &\leq \operatorname{cap}^c(M,F_0,F_1)^{1/d}+\tfrac12\delta^{1/d}\end{aligned}$$

d'où $\operatorname{cap}^c(M,F_0,F_1)>2^{-d}\delta=\eta(L)$. ▫

6.12. Corollaire. *Il n'existe pas d'homéomorphisme de* 4*-dilatation bornée du groupe de Heisenberg* Heis *sur* $\mathbf{R}^3$.

En effet, si $f\colon \mathrm{Heis}\to\mathbf{R}^3$ était un tel homéomorphisme, il existerait une constante K telle que, si x, $y\in\mathrm{Heis}$,

$$+\infty=t_4^{\mathrm{Heis}}(x,y)\leq K\,t_4^{\mathbf{R}^3}\big(f(x),f(y)\big)<+\infty,$$

contradiction. ▫

Je remercie le referee qui m'a signalé ce point.

6.13. Remarque. Je ne connais pas de majoration optimale de t_p, pour $p>d$, sur un groupe nilpotent non abélien.

On voit aisément que $t_p(x,y)\leq$ const. dès que $|x-y|\geq1$. En effet, fixons une boule B de centre l'élément neutre e et de rayon 2. On construit aisément une fonction w lisse sur $B\times B\times B$ ayant les propriétés suivantes.

(i) Si x', $y'\in B$, $z'\in\partial B$, alors $w(x',y',\delta_t z')=w(x',y',z')$ pour $t\in[\frac12,1]$;
(ii) si x', $y'\in\partial B$ ne sont pas trop proches l'un de l'autre, alors $w(x',y',x')=0$ et $w(x',y',y')$=1.

Si x, $y\in G$, et $|x-y|=R$, on peut, quitte à translater, supposer que $|x-e|=|y-e|=\frac12R$. On pose alors $u(z)=w\big(\delta_{1/R}(x),\delta_{1/R}(y),\delta_{1/R}(z)\big)$.

Comme les dilatations $\delta_{1/R}$ contractent au moins comme $1/R$, on a, à distance $r > R$ de y, $|du| \leq \text{const.}\, 1/R$, donc

$$\int_{G\setminus B(e,1)} |du|^p \leq \text{const.} \int_1^{+\infty} r^{-p} \operatorname{vol} \partial B(y,r)\, dr$$
$$\leq \text{const.} \int_1^{+\infty} p\, r^{-p-1} \operatorname{vol} B(y,r)\, dr \leq \text{const.}$$

(on a effectué une intégration par parties). Enfin, u prend les valeurs 0 et 1 sur des orbites de δ_t passant par x et y. Elle peut donc servir de fonction test pour t_p, et on trouve $t_p(x,y) \leq \text{const.}$ □

6.14. Courbure négative.

6.15. Proposition. *Soit M une variété riemannienne à courbure négative δ-pincée. Si $p > (n-1)/\sqrt{\delta}$ alors, $t_p \sim |x-y|^{1-p}$. Inversement, si $n-1 < p < \mathbf{p}(M)$, alors $t_p = +\infty$.*

Dans les deux cas, $t_p \sim h_p$. En effet, on a toujours $t_p \geq h_p$. Si p est grand, la fonction test utilisée pour majorer h_p en 4.13 sert aussi pour t_p. □

7. L'invariant de Kuusalo–Vodopjanov–Goldstein

7.1. Définition. L'invariant de *Kuusalo–Vodopjanov–Goldstein* est une fonction de deux points qui dépend du choix d'une boule B. $kvg_{p,B}(x,y)$ est la borne inférieure des intégrales $\int |du|^p$ où u décrit les fonctions de $\mathscr{A}_p$ qui s'annullent sur B et prennent la valeur 1 sur un compact connexe reliant x à y.

La fonction $kvg_{n,B}(\cdot,\cdot)$ est une distance sur M compatible avec sa topologie. En 1969, T. Kuusalo s'en est servi pour montrer qu'une variété admettant une structure conforme (et même quasiconforme, voir [16]) est nécessairement paracompacte. En 1978, S. Vodopjanov et V. Goldshtein l'ont utilisé pour construire une compactification des variétés riemanniennes naturelle sous les transformations quasiconformes, [33].

On note $D = \min\{d(x,B), d(y,B)\}$. On s'intéresse au comportement de $kvg_{p,B}(x,y)$ en fonction de $|x-y|$ et D lorsque ces distances tendent vers l'infini. Comme B est fixée une fois pour toutes, elle n'apparaîtra plus dans la notation.

7.2. Cas euclidien.

7.3. Proposition. *Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, pour $p \leq n-1$, $kvg_p = 0$. Pour $n-1 < p < n$, $kvg_p \sim 1$. Enfin, pour $p > n$, $kvg_p(x,y) \sim D^{n-p}$, où les constantes sont indépendantes de $|x-y|$.*

Les fonctions test utilisées en 5.5 montrent aussi que $kvg_p = 0$ pour $p \leq n-1$.

L'argument utilisé en 6.3 pour montrer que $t_p = +\infty$ pour $n-1 < p < n$ s'adapte et donne $kvg_p \geq \text{const.}$ pour $n-1 < p < n$, dès que $|x-y| \geq 1$. L'inégalité inverse est évidente.

Enfin, on a par définition $kvg_p(x,y) \geq \max\{h_p(x,B), h_p(y,B)\} \geq \text{const.}\, D^{n-p}$ si $p > n$ (on a noté $h_p(x,B) = \sup\{h_p(x,z) \mid z \in B\}$). L'inégalité inverse résulte de 7.8.

7.4. Propriétés générales.

7.5. Proposition. *Si $p \leq n-1$, alors $kvg_p = 0$.*

Comme en 5.5, transporter les fonctions test euclidiennes, pour conclure que $kvg_p = 0$ pour $p \leq n-1$. □

7.6. Proposition. *Si $D > 1$, alors kvg_p est majoré par une constante qui ne dépend que M et de B.*

Il suffit de prendre $u(z) = \min\{1, d(z,B)\}$ pour majorer $kvg_{p,B}$ lorsque $D \geq 1$. □

7.7. Proposition. *Si M est une variété riemannienne à géométrie bornée, alors pour $p > n$, $kvg_p(x,y) \geq \max\{h_p(B,x), h_p(B,y)\} \geq \text{const.}\, D^{1-p}$.*

L'inégalité $kvg_p(x,y) \geq \max\{h_p(B,x), h_p(B,y)\}$ résulte de la définition, et

$$\max\{h_p(B,x), h_p(B,y)\} \geq \text{const.}\, D^{1-p}$$

vient de 4.6. □

7.8. Proposition. *Si M est à croissance polynomiale de degré ν, alors pour $p > \nu$, $kvg_p(x,y) \leq \text{const.}\, D^{\nu-p}$.*

Utiliser la fonction test de 4.7. □

7.9. Groupes de Lie nilpotents gradués.

7.10. Proposition. *Soit G un groupe de Lie nilpotent gradué de dimension n et de dimension isopérimétrique d. Si $n-1 < p < d$, alors $kvg_p \sim 1$. Si $p > d$, $kvg_p(x,y) \sim D^{d-p}$.*

Lorsque $n-1 < p \leq n$, l'inégalité $kvg_p(x,y) \geq \max\{h_p(B,x), h_p(B,y)\}$ peut être remplacée par $kvg_p(x,y) \geq \max\{h_{p,\varepsilon}(B,x), h_{p,\varepsilon}(B,y)\}$ (à condition de supposer $D \geq 1$ et $|x-y| \geq 1$). C'est une conséquence du lemme 5.9 et des considérations qui le suivent.

Pour un groupe gradué, la proposition 4.11 combiné avec la croissance polynomiale (proposition 7.8) donne les valeurs $kvg_p \sim 1$ si $n-1 < p < d$, et $kvg_p(x,y) \sim D^{d-p}$ si $p > d$. □

7.11. Courbure négative.

7.12. Proposition. *Soit M une variété à courbure négative δ-pincée. Si $n-1 < p < \mathbf{p}(M)$ alors $kvg_p \sim 1$. Si $p > (n-1)/\sqrt{\delta}$, on peut majorer $kvg_p(x,y)$ par $\text{const.}\, D'^{1-p}$ où D' est la distance de B au segment géodésique joignant x à y.*

Sous l'hypothèse $L^{p,p}H^1(M)=0$, on utilise les inégalité

$$kvg_p(x,y)\geq \max\{h_{p,\varepsilon}(B,x),h_{p,\varepsilon}(B,y)\}$$

(cf. 7.10) et $h_{p,\varepsilon}(x,z)\geq$ const. (4.8).

Si la courbure est δ-pincée et si $p\geq (n-1)/\sqrt{\delta}$, on construit comme en 4.13 une fonction test adaptée au plus court segment reliant B au segment géodésique $[xy]$. Par hypothèse, sa longueur est D'. Cela fournit l'inégalité $kvg_p(x,y)\leq \mathrm{const.}\, D'^{1-p}$, qui n'est peut-être pas optimale. □

Remarque. Lorsque $p=n$, les invariants h_n, g_n et t_n sont des cas limites de l'invariant de quatre points de J. Ferrand, [2]. On en trouvera des applications récentes dans [4].

8. Exemples d'applications de p-dilatation bornée en courbure négative

Soit H^n l'espace hyperbolique de courbure -1.

8.1. Proposition. *Il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de H^n sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si $p<n$. Il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de $\mathbf{R}^n$ sur H^n si et seulement si $p\notin]n-1,n]$.*

En coordonnées polaires, la métrique euclidienne s'écrit $dr^2+r^2d\theta^2$ et la métrique hyperbolique s'écrit $dr^2+\sinh(r)^2d\theta^2$. Ici $d\theta^2$ désigne la métrique canonique de la sphère S^{n-1}. Etant donné $c>0$, soit f_c l'application de H^n sur $\mathbf{R}^n$ qui en coordonnés polaires s'écrit

$$f_c(r,\theta)=\bigl(\sinh(cr)/c,\theta\bigr).$$

Alors f_c est un difféomorphisme, et lorsque r tend vers $+\infty$,

$$J_{f_c}=\cosh(cr)\bigl(\sinh(cr)/c\bigr)^{n-1}\sinh(r)^{1-n}\sim e^{(nc+1-n)r}$$

et

$$|df_c|=\cosh(cr)\sim e^{cr},\qquad |d(f_c)^{-1}|=\frac{c\sinh(r)}{\sinh(cr)}\sim e^{(1-c)r}.$$

Par conséquent, si $c>(n-1)/n$, f_c est de p-dilatation bornée avec $p=(nc+1-n)/c$ qui décrit $]0,n[$ lorsque c varie de $(n-1)/n$ à $+\infty$.

Le difféomorphisme réciproque f_c^{-1} est de p-dilatation bornée dès que $p=(n-1-nc)/(c-1)>0$. Lorsque c varie de 0 à $(n-1)/n$, p décroît de $n-1$ à 0. Lorsque c varie de 1 à $+\infty$, p décroît de $+\infty$ à n. Enfin, l'application f_0^{-1} (c'est l'identité en coordonnées polaires) a une $n-1$-dilatation bornée de $\mathbf{R}^n$ vers H^n.

Inversement, on sait que $\mathbf{R}^n$ et H^n ne sont pas quasiisométriques. D'autre part, la dimension isopérimétrique de H^n est infinie. Il résulte donc du théorème 1 qu'il n'existe pas de difféomorphisme de p-dilatation bornée de $\mathbf{R}^n$ sur H^n si $p\geq n$ et qu'il n'existe pas de difféomorphisme de p-dilatation bornée de H^n sur $\mathbf{R}^n$ si $p\in]n-1,n]$. □

8.2. Proposition. *Soit M une variété simplement connexe de dimension n, à courbure négative δ-pincée. Alors pour tout $p < n$, il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de M sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout $p \le (n-1)\sqrt{\delta}$ il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de $\mathbf{R}^n$ sur M.*

Reprenons la même construction, en remplaçant la métrique hyperbolique par une métrique à courbure variable. En coordonnées polaires, la métrique de M s'écrit $dr^2 + g_r$ où $\big(\sinh(\sqrt{\delta}\,r)/\sqrt{\delta}\,\big)^2 d\theta^2 \le g_r \le \sinh(r)^2 d\theta^2$. Il vient

$$J_{f_c} \ge e^{(nc+1-n)r}, \quad J_{f_c^{-1}} \ge e^{(nc-(n-1)\sqrt{\delta}\,)r} \quad \text{et} \quad |df_c| \sim e^{cr}, \quad |d(f_c)^{-1}| \le e^{(1-c)r},$$

donc seule la borne $n-1$ est remplacée par $(n-1)\sqrt{\delta}$. $\square$

8.3. Corollaire. *Soient M et N des variétés simplement connexes de dimension n, à courbure négative. On suppose que la courbure sectionnelle de M est δ-pincée. Alors pour tout $p \le (n-1)\sqrt{\delta}$ il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de N sur M. En particulier, si on suppose de plus que M n'est pas quasiisométrique à H^n, il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de M sur l'espace hyperbolique H^n si et seulement si $p \le n-1$.*

En effet, il suffit d'utiliser des applications composées $M \to \mathbf{R}^n \to N$ et $N \to \mathbf{R}^n \to M$. Ceci achève la preuve du théorème 2. $\square$

8.4. Distorsion exponentielle. Soit $f\colon M \to N$ un difféomorphisme, et $x \in M$. Pour $R > 0$, appelons

$$L(R) = \sup\{|d_y f| \mid y \in B(x,R)\}$$

la fonction distorsion de f en x. Disons que f a une *distorsion polynomiale de degré* $\le c$ (resp. *exponentielle*) s'il existe un point $x \in M$ telle que $L(R)$ soit majorée par const.$(x)R^c$ (resp. minorée par $\exp(\text{const.}\,R)$). Clairement, cette notion ne dépend pas du choix du point x.

Pour $1 < p < n$, un difféomorphisme de p-dilatation bornée de H^n sur $\mathbf{R}^n$ a une distorsion au moins exponentielle.

En effet, f envoie la boule $B(x,R)$ dans la boule $B(f(x),R')$ où $R' = \int_0^R L(r)\,dr$. La p-capacité

$$\operatorname{cap}_p(B) = \inf\left\{ \int |du|^p \mid u \text{ à support compact, } u = 1 \text{ sur } B \right\}$$

vaut $e^{(n-1)R}$ dans H^n. Comme un difféomorphisme de p-dilatation bornée augmente la p-capacité, on trouve que, dans le cas de $H^n \to \mathbf{R}^n$, $R' \ge \exp\big((n-1)/(n-p)R\big)$, donc $L(R)$ croît exponentiellement. Cette estimation est optimale, comme le montrent les exemples du paragraphe 8.1.

9. Exemples de difféomorphismes de p-dilatation bornée entre groupes de Lie nilpotents

9.1. Homeomorphismes plurihomogènes de $\mathbf{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite de rationnels ≥ 1. On note t^a la matrice diagonale de coefficients t^{a_i}. On dit qu'une fonction continue ϱ sur $\mathbf{R}^n$ est une a-*jauge* si

(i) ϱ est de classe C^1 en dehors de l'origine ;
(ii) les fonctions $x_i(\partial\varrho/\partial x_i)$ sont strictement positives en dehors de l'origine ;
(iii) $\varrho \circ t^a = t\varrho$.

Exemple. Soit D un dénominateur commun pour les nombres rationnels $1/a_i$, de sorte que $1/a_i = p_i/D$ avec p_i entier. Alors la fonction

$$\varrho = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2p_i}\right)^{1/2D}$$

est une a-jauge.

Fixons une a-jauge ϱ. Soit $b = (b_1, \ldots, b_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs. On pose

$$\varphi_b(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1\varrho^{b_1-a_1}, \ldots, x_n\varrho^{b_n-a_n}\big).$$

Alors φ_b est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui satisfait $\varphi_b \circ t^a = t^b \circ \varphi_b$. En effet, φ_b est de classe C^1 en dehors de l'origine. Son Jacobien vaut

$$J_{\varphi_c} = \varrho^s\left(1 + \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\frac{x_i}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\right) = \varrho^{s-1}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\right),$$

où $s = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$, car l'identité $\varrho \circ t^a = t\varrho$ entraîne que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i(\partial\varrho/\partial x_i) = \varrho$. Comme φ_b est un difféomorphisme local qui est propre, c'est un revêtement donc un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même.

V. Goldshtein, L. Gurov et A. Romanov ont remarqué que φ_b et ${\varphi_b}^{-1}$ sont des homéomorphismes de p-dilatation bornée pour la métrique euclidienne.

9.2. Difféomorphismes homogènes entre groupes de Lie nilpotents gradués. Soit G et G' des groupes de Lie nilpotents gradués, de dilatations respectives δ_t et δ'_t. On dira (abusivement) qu'un difféomorphisme f de G sur G' est *homogène de degré* c si, en dehors d'un voisinage de l'origine, on a $f \circ \delta_t = \delta'_{t^c} \circ f$. Il en existe toujours. En effet, on choisit un isomorphisme d'espaces vectoriels $i\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ qui envoie l'espace propre pour t^{a_i} de ε_t sur l'espace propre t^{b_i} de ε'_t et on pose $f = \exp_{G'} \circ i \circ \varphi_{cb} \circ \exp_G^{-1}$.

9.3. Exemple : un difféomorphisme de $\mathbf{R}^3$ sur le groupe de Heisenberg. Soit $c \in]0, +\infty[$. On considère l'application

$$\varphi_c\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad (x,y,z) \to (x\varrho^{c-1}, y\varrho^{c-1}, z\varrho^{2c-1}) \text{ où } \varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

puis f_c est la composition

$$f_c\colon \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\varphi_c} \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\exp} \mathrm{Heis}^3$$

où $\mathbf{R}^3$ est vu comme l'algèbre de Lie de Heis^3, dont le centre est l'axe des z. On modifie f_c pour en faire un difféomorphisme à l'origine. On obtient ainsi un difféomorphisme homogène de degré c de $\mathbf{R}^3$ sur Heis.

Vérifions que f_c est de p-dilatation bornée. La métrique invariante de Heis^3 se lit $dx^2 + dy^2 + \big(dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx)\big)^2$ en coordonnées exponentielles.

Dans les bases orthonormées $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ de $T\mathbf{R}^3$ et

$$\left(X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}, Z = \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

de $T\,\mathrm{Heis}^3$, la matrice de df_c est un produit de matrices $A(x,y,z)B(\varrho)$ où $B = \mathrm{diag}\,(\varrho^{c-1}, \varrho^{c-1}, \varrho^{2c-1})$ et où les coefficients de la matrice $A(x,y,z)$ sont des fonctions homogènes de degré 0 sur $\mathbf{R}^3$. La matrice A et son inverse sont bornées, donc le calcul de la norme de f_c et de son inverse se ramène à celui de B et B^{-1}. Il vient

$$|df_c| \le \mathrm{const.}\,\varrho^{2c-1} \qquad \text{e} \qquad |d(f_c^{-1})| \le \mathrm{const.}\,\varrho^{1-c}.$$

Si $c > 0$ et $c \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, alors $(4c-3)/(2c-1) > 0$ d'où $|df_c|^p \le \mathrm{const.}\,J_{f_c}$ avec $p = (4c-3)/(2c-1)$. Si $c > 0$ et $c \notin \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, alors $(3-4c)/(1-c) > 0$ d'où $|d(f_c^{-1})|^p \le \mathrm{const.}\,J_{f_c^{-1}}$ avec $p = (4c-3)/(c-1)$.

Lorsque c varie de 0 à $\frac{1}{2}$, $(4c-3)/(2c-1)$ croît de 3 à $+\infty$. Lorsque c varie de $\frac{3}{4}$ à $+\infty$, $(4c-3)/(2c-1)$ croît de 0 à 2. En modifiant f_c au voisinage de 0, on obtient donc un difféomorphisme de p-dilatation bornée de $\mathbf{R}^3$ sur Heis^3 pour chaque $p > 0$, $p \notin [2,3]$.

Lorsque c varie de 0 à $\frac{3}{4}$, $(4c-3)/(c-1)$ décroît de 3 à 0. Lorsque c varie de 1 à $+\infty$, $(4c-3)/(c-1)$ décroît de $+\infty$ à 4. En modifiant f_c^{-1} au voisinage de 0, on obtient donc un difféomorphisme de p-dilatation bornée de Heis^3 sur $\mathbf{R}^3$ pour chaque $p > 0$, $p \notin [3,4]$. Au vu du théorème 1, cet intervalle est optimal à la borne 4 près.

9.4. Généralisation. L'idée de la construction précédente se généralise comme suit.

9.5. Proposition. *Soient G et G' deux groupes de Lie nilpotents gradués de de même dimension. Notons d (resp. d') la dimension isopérimétrique et r (resp. r') le degré de nilpotence (de sorte que $r = 1$ pour un groupe abélien et $r = 2$ pour le groupe d'Heisenberg). Alors pour tout $p > 0$, $p \notin [d'/r', d]$, il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de G sur G'.*

En effet, fixons $c > 0$, et choisissons un difféomorphisme f homogène de degré c de G sur G'. Soit ϱ une jauge sur G.

Pour $x \in G$, notons L_x la translation à gauche sur G. Alors $L_{f(x)^{-1}} \circ f \circ L_x$ est un difféomorphisme qui envoie l'origine de G sur l'origine de G'. Notons $A(x) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$ sa différentielle à l'origine. Si $t \geq 1$ et $f \circ \delta_t = \delta'_{t^c} \circ f$ au voisinage de x, alors

$$A\big(\delta_t(x)\big) = \varepsilon'_{t^c} \circ A(x) \circ \varepsilon_{t^{-1}} = (t^{-1}\varepsilon'_{t^c}) \circ A(x) \circ (t\varepsilon_{t^{-1}})$$

d'où

$$\big|A\big(\delta_t(x)\big)\big| \leq |t^{-1}\varepsilon'_{t^c}|\,|A(x)| \leq t^{cr'-1}|A(x)|. \tag{+}$$

Par compacité de l'ensemble $\{\varrho = 1\}$, on en déduit que, si $x \in G$ satisfait $\varrho(x) \geq 1$, $|d_x f| = |A(x)| \leq \text{const.}\, \varrho^{cr'-1}$. Comme $J_f(x) \geq \text{const.}\, \varrho^{cd'-d}$, on conclut que f est de p-dilatation bornée, où $p = (cd' - d)/(cr' - 1)$ varie de d à $+\infty$ et de 0 à d'/r' lorsque c varie de 0 à $1/r'$ et de d/d' à $+\infty$. □

Remarque. Deux groupes de Lie nilpotents gradués non isomorphes ne sont pas quasiisométriques, [22]. Le théorème 1 entraîne donc que si G et G' ne sont pas isomorphes, il n'y a pas de difféomorphismes de p-dilatation bornée de G dans G' pour $p \in \big](n-1)/(d'-1)d', d\big[$ où $n = \dim G = \dim G'$.

9.6. Cas limites. On peut chercher à affiner l'inégalité $(+)$, mais cela permet seulement d'attraper les cas limites, i.e., de construire des difféomorphismes homogènes de p-dilatation bornée avec $p = d$ ou $p = d'/r'$.

On va le faire pour le groupe d'Heisenberg. Dans ce cas, le théorème 1 entraîne que, lorsque $\frac{8}{3} < p < 4$, tout difféomorphisme de p-dilatation bornée de Heis sur Heis est une quasiisométrie. Il est probable que cet intervalle peut être élargi à $2 < p < 4$. Les cas limites sont couverts par la proposition suivante.

9.7. Proposition. *Il existe des difféomorphismes de p-dilatation bornée non quasiisométriques de* Heis *sur* Heis *pour $p = 2$ et $p = 4$.*

Il suffit de construire un difféomorphisme de Heis sur Heis qui, en dehors d'un voisinage de l'origine, est *de contact* et homogène de degré $c \neq 1$.

La structure de contact considérée sur le groupe de Heisenberg est le champ de plans engendré par les deux premiers champs du repère de champs de vecteurs invariants à gauche (X, Y, Z). Autrement dit, c'est le noyau de la 1-forme différentielle $\tau = dz - \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$. Un difféomorphisme f est de contact s'il préserve ce champ de plans. Alors la matrice A de sa différentielle dans la base (X, Y, Z) est triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

où Q est une matrice 2×2.

Si f est homogène de degré c, i.e., si $\delta_{\varepsilon^c}\circ f = f\circ\delta_\varepsilon$, alors, à distance ϱ de l'origine,

$$df = \mathrm{diag}\,(\varrho^c,\varrho^c,\varrho^{2c})A\,\mathrm{diag}\,(\varrho^{-1},\varrho^{-1},\varrho^{-2}) = \begin{pmatrix}\varrho^{c-1}Q & \varrho^{c-2}R\\ 0 & \varrho^{2c-2}s\end{pmatrix}$$

et $J_f \simeq \varrho^{4c-4}$, $|df|\le\varrho^{c-1}$ si $c<1$ et $|df|\le\varrho^{2c-2}$ si $c>1$. Par conséquent, f est de p-dilatation bornée avec $p=4$ si $c<1$ et $p=2$ si $c>1$.

Construction d'une transformation de contact homogène. On utilise la notion de *potentiel* pour un champ de vecteurs qui engendre un groupe à un paramètre de transformations de contact. Si u est une fonction sur Heis, alors il existe un unique champ de vecteurs de contact H tel que $\iota_H\tau = u$, c'est le champ $H=(Yu)X-(Xu)Y+uZ$. Par exemple, le groupe à un paramètre δ_{e^t} est engendré par le champ de vecteurs $H_0 = xX+yY+2zZ$ de potentiel $u_0=2z$.

Soit u une fonction C^∞ à support compact sur Heis qui coincide avec $2z$ au voisinage de l'origine. Soit H le champ de vecteurs de contact dont le potentiel est la fonction $u(z)$. Soit ϕ le temps ε du flot de H. Alors ϕ est de contact, est l'identité hors de la boule $B(R)$, et dans une petite boule $B(tR)$ coincide avec δ_ε. Soit c tel que $t^c=\varepsilon$. On constate qu'au voisinage la sphère de rayon R, ϕ coincide avec $\delta_{t^{-c}}\circ\phi\circ\delta_t$. L'application f de Heis dans Heis qui, sur la couronne $B(t^nR)\setminus B(t^{n+1}R)$, vaut $\delta_{t^{nc}}\circ\phi\circ\delta_{t^{-n}}$ est donc un difféomorphisme de contact de Heis qui satisfait $f\circ\delta_{t^n}=\delta_{t^{nc}}\circ f$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$. Cela suffit pour conclure que f ou f^{-1} est de p-dilatation bornée avec $p=2$ ou 4. □

Remarque. De la même façon, on construit des difféomorphismes de contact et homogènes des groupes d'Heisenberg Heis^n, $n=5,7,\ldots$, qui ne sont pas des quasiisométries mais sont tout de même de p-dilatation bornée avec $p=n+1$ et $p=\frac{1}{2}(n+1)$.

9.8. Groupes de Lie nilpotents non gradués. Tout groupe de Lie nilpotent de dimension inférieure ou égale à 4 est gradué. En dimension 5, il existe exactement un groupe de Lie nilpotent non gradué N^5. Son algèbre de Lie $\mathscr{N}^5$ possède une base $X_1,\ldots,X_5$ telle que les seuls crochets non nuls soient $[X_1,X_2]=X_4$, $[X_1,X_4]=X_5$ et $[X_2,X_3]=X_5$. Dans l'algèbre de Lie graduée associée $\mathrm{gr}\,\mathscr{N}^5$, le dernier crochet est remplacé par $[X_2,X_3]=0$, i.e., la droite $\mathbf{R}X_3$ est un facteur direct. Le groupe de Lie gradué correspondant N^5_∞ est donc un produit direct $N^5_\infty = N^4\oplus\mathbf{R}$.

Notons $\big(\omega_1(e),\ldots,\omega_5(e)\big)$ la base duale de $(X_1,\ldots,X_5)$. Ces formes linéaires sur $\mathscr{N}^5$ (qu'on identifie à $\mathrm{gr}\,\mathscr{N}^5$) déterminent des 1-formes différentielles invariantes à gauche $\omega_1,\ldots,\omega_5$ sur N^5 et des 1-formes différentielles invariantes à gauche $\omega'_1,\ldots,\omega'_5$ sur le groupe gradué N^5_∞. En coordonnées exponentielles

$(x_1,\ldots,x_5)\mapsto \exp\bigl(\sum x_iX_i\bigr)$, ces formes s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\omega_1=\omega_1'=dx_1,\quad \omega_2=\omega_2'=dx_2,\quad \omega_3=\omega_3'=dx_3,\\
&\omega_4=\omega_4'=dx_4+\tfrac12(x_2dx_1-x_1)dx_2,\\
&\omega_5=dx_5+\tfrac12x_4dx_1-\tfrac12x_1dx_4-\tfrac16x_1x_2dx_1+\tfrac16x_1^2dx_2\\
\text{et}\quad &\omega_5'=\omega_5-\tfrac12x_3dx_2+\tfrac12x_2dx_3.
\end{aligned}$$

On voit que les formes invariantes de N^5_∞ ne diffèrent de celles de N^5 que par un terme d'ordre inférieur. Cela signifie que le difféomorphisme naturel de N^5 sur N^5_∞ qui est l'identité en coordonnées exponentielles, bien que n'étant pas bilipschitz, va transformer un difféomorphisme homogène de N^5_∞ en un difféomorphisme de p-dilatation bornée de N^5_∞ sur N^5. La proposition suivante montre que cette propriété est générale. Avec elle s'achève la preuve du théorème 3.

9.10. Proposition. *Soit G un groupe de Lie nilpotent de dimension n et de degré de nilpotence r, G_∞ le groupe de Lie gradué associé, de dimension isopérimétrique d. Pour tout $p>0$, $p\notin[d/r,d]$, il existe un difféomorphisme de p-dilatation bornée de G sur G_∞ et de G_∞ sur G.*

Comme en 3.4, fixons un isomorphisme d'espaces vectoriels i de $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$ sur $\mathscr{G}$ tel que i^{-1} préserve la filtration centrale descendante et induise l'identité sur les quotients $\mathscr{G}_i/\mathscr{G}_{i+1}$. Notons $j=\exp\circ i\circ\exp_\infty^{-1}$ le difféomorphisme de G_∞ sur G correspondant. Il s'agit de comprendre le comportement de la différentielle d_xj lorsque x tend vers l'infini dans G_∞. Pour cela, on note

$$B(x)=i^{-1}\circ d_e(L_{j(x)^{-1}}\circ j\circ L_x^\infty)$$

la différentielle en x de j vue comme un endomorphisme de $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$ grâce aux translations à gauche.

Notons ε_t (resp. δ_t) le groupe à un paramètre canonique d'automorphismes de $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$ (resp. de G_∞).

9.10. Lemme. *Lorsque t tend vers $+\infty$, la différentielle*

$$\varepsilon_t^{-1}\circ B(\delta_tx)\circ\varepsilon_t$$

converge vers l'identité uniformément lorsque x varie dans un compact de G_∞.

Preuve du lemme 9.10. On fait apparaître G comme une déformation arbitrairement petite de G_∞, i.e., on construit une déformation continue G_t du groupe de Lie nilpotent G_∞, telle que pour t fini, G_t soit isomorphe à G.

Au moyen de i, transportons la structure d'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ sur l'espace vectoriel $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$,

$$[u,v]_1=i^{-1}\bigl([i(u),i(v)]_{\mathscr{G}}\bigr)$$

et posons

$$[u,v]_t = (\varepsilon_t)^{-1}\big([\varepsilon_t(u),\varepsilon_t(v)]_1\big).$$

On note G_t le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $(\mathrm{gr}\,\mathscr{G},[\,,]_t)$, de sorte que G_1 est isomorphe à G. Lorsque t tend vers $+\infty$, $[\,,]_t$ converge vers la structure d'algèbre de Lie de $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$. Par conséquent, les translations à gauche de G_t convergent vers celles de G_∞ au sens suivant. Notons $i_t = \exp_t \circ \exp_\infty^{-1}$. Alors $i_t^{-1}\circ L^t_{i_t(x)}\circ i_t\circ L^\infty_{x^{-1}}$ converge vers l'identité lorsque t tend vers $+\infty$, uniformément pour x dans un compact de G_∞.

Par construction, l'application $i\circ\varepsilon_t\colon (\mathrm{gr}\,\mathscr{G},[\,,]_t) \to (\mathscr{G},[\,,]_{\mathscr{G}})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, donc

$$\theta_t = \exp_1 \circ i\circ \varepsilon_t \circ \exp_t^{-1} = j\circ\delta_t\circ i_t^{-1}$$

est un isomorphisme de G_t sur G. Par conséquent, $L_{\theta_t(i_t x)} = \theta_t\circ L^t_{i_t(x)}\circ(\theta_t)^{-1}$. Il vient

$$\begin{aligned} j^{-1}\circ L_{j(\delta_t x)^{-1}}\circ j\circ L^\infty_{\delta_t x} &= j^{-1}\circ L_{\theta_t(i_t x)^{-1}}\circ j\circ L^\infty_{\delta_t x}\\ &= j^{-1}\circ\theta_t\circ L^t_{i_t(x)^{-1}}\circ\theta_t^{-1}\circ j\circ L^\infty_{\delta_t x}\\ &= \delta_t\circ i_t^{-1}\circ L^t_{i_t(x)^{-1}}\circ i_t\circ\delta_t^{-1}\circ L^\infty_{\delta_t x}\\ &= \delta_t\circ i_t^{-1}\circ L^t_{i_t(x)^{-1}}\circ i_t\circ L^\infty_{x}\circ\delta_t^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^{-1}\circ B(\delta_t x)\circ\varepsilon_t &= d_e(\delta_t^{-1}\circ j^{-1}\circ L_{j(\delta_t x)^{-1}}\circ j\circ L^\infty_{\delta_t x}\circ\delta_t)\\ &= d_e(i_t^{-1}\circ L^t_{i_t(x)^{-1}}\circ i_t\circ L^\infty_x) \end{aligned}$$

converge vers l'identité de $\mathrm{gr}\,\mathscr{G}$. Ceci achève la preuve du lemme 9.10. ▫

Le lemme 9.10 permet d'estimer la différentielle de j comme suit. Fixons une jauge ϱ sur G_∞. Si $x\in G_\infty$ et $\varrho(x)=t\ge 1$, alors $x=\delta_t x_0$ où $\varrho(x_0)=1$. Alors $B(x)=\varepsilon_t\circ u\circ\varepsilon_t^{-1}$ où u est bornée, donc

$$|d_x j| = |B(x)| = |\varepsilon_t\circ u\circ\varepsilon_t^{-1}| = |t^{-1}\varepsilon_t\circ u_t\circ(t\varepsilon_t^{-1})| \le \text{const.}\,\varrho^{r-1}.$$

Comme le jacobien de j vaut 1, la p-dilatation de j n'est bornée pour aucune valeur de p.

Fixons un $c>0$ et un difféomorphisme φ de G_∞ homogène de degré c, i.e., tel que, en dehors d'un voisinage de l'origine, $\varphi\circ\delta_t = \delta_{t^c}\circ\varphi$. Posons $f = j\circ\varphi\colon G_\infty\to G$. Vérifions que f est de p-dilatation bornée pour $p=(cd-d)/(cr-1)$. Comme l'application exponentielle des groupes nilpotents préserve le volume, $J_f\sim\varrho^{(c-1)d}$. Comme en 9.5, notons $A(x)=d_e(L^\infty_{\varphi(x)^{-1}}\circ\varphi\circ L^\infty_x)$ et $C(x)=d_e(L_{f(x)^{-1}}\circ f\circ L^\infty_x)$, de sorte que $C(x)=B\big(\varphi(x)\big)\circ A(x)$. Si $x\in G_\infty$ et $\varrho(x)=t\ge1$, alors $x=\delta_t x_0$ où $\varrho(x_0)=1$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t^c}^{-1}\circ C(x)\circ\varepsilon_t &= \varepsilon_{t^c}^{-1}\circ B\big(\delta_{t^c}\varphi(x_0)\big)\circ\varepsilon_{t^c}\circ\varepsilon_{t^c}^{-1}\circ A(\delta_t x_0)\circ\varepsilon_t\\ &= \varepsilon_{t^c}^{-1}\circ B\big(\delta_{t^c}\varphi(x_0)\big)\circ\varepsilon_{t^c}\circ A(x_0) \end{aligned}$$

est borné, donc $|d_x f| = |C(x)| \le \text{const.}\,\varrho^{cr-1}$. En particulier, f (resp. f^{-1}) est de p-dilatation bornée pour les mêmes valeurs de p que dans la proposition 9.5. ▫

9.11. Distorsion polynomiale. En 8.4, on a montré qu'un difféomorphisme de p-dilatation bornée de H^n sur $\mathbf{R}^n$ a une distorsion au moins exponentielle. Le même argument montre que, pour $1 < p < n$, un difféomorphisme de p-dilatation bornée entre groupes de Lie nilpotents G et G' de dimensions isopérimétriques $d > d'$ a une distorsion au moins polynomiale de degré $c = (d - d')/(d' - p)$.

En effet, la p-capacité d'une boule de rayon R dans un groupe de Lie nilpotent de dimension isopérimétrique d vaut const. R^{d-p}. Si $f\big(B(x,R)\big) \subset B\big(f(x),R'\big)$, alors $R' \geq R^{(d-p)/(d'-p)}$, donc la fonction distorsion $L(R)$ (cf. 8.4) croît au moins comme $R^{(d-d')/(d'-p)}$. Cette estimation est optimale dans le cas où G' est abélien, mais seulement dans ce cas. Les exemples homogènes du paragraphe 9.4 ont une distorsion polynomiale de degré $(d - d' + p(r' - 1))/(d - p + p(r' - 1))$. Il ne sont donc optimaux du point de vue de la distorsion que si $r' = 1$.

10. Questions

10.1. Difféomorphismes de p-dilatation bornée $\mathbf{R}^3 \to \mathrm{Heis}^3$ pour $2 \leq p \leq \frac{8}{3}$. Est ce qu'il en existe ?

10.2. Difféomorphismes de p-dilatation bornée $H^n \to N$ lorsque N est à courbure négative. La dépendance par rapport au pincement est-elle essentielle ? Des considérations liées à la *cohomologie $L^{p,p}$ réduite* peuvent le faire penser.

L'espace de Banach $L^p\overline{H}^1(M)$ est le quotient des 1-formes fermées L^p par l'adhérence L^p des différentielles de fonctions L^p. Dans cette définition, on peut remplacer fonctions L^p par fonctions à support compact. Par conséquent, un difféomorphisme de p-dilatation bornée induit toujours un morphisme en cohomologie $L^{p,p}$ réduite.

Pour $p \leq n - 1$, cet espace est nul pour l'espace hyperbolique H^n, mais n'est pas toujours nul en courbure variable. Si N est δ-pincée, la condition $p \leq (n-1)\sqrt{\delta}$ est suffisante pour que $L^p\overline{H}^1(N) = 0$. Toutefois, je ne vois pas de raison pour que le morphisme en cohomologie réduite induit par un difféomorphisme de p-dilatation bornée soit non nul.

10.3. Homéomorphismes de p-dilatation bornée. Si f est un homéomorphisme de p-dilatation bornée avec $p > n-1$, est ce que f^{-1} est q-dilatation bornée avec $(1/q) + \big((n - 1)/p\big) = 1$?

10.4. Comportement de l'invariant de Grötsch sur un groupe nilpotent, pour $n - 1 < p \leq d - 1$. Est-il isotrope (i.e., ne dépend-il que de la distance) ? On peut poser la même question pour t_p, $p > d$.

10.5. Comportement des invariants sur les groupes nilpotents non gradués. D'après [20], tout groupe nilpotent G ressemble asymptotiquement à un groupe nilpotent gradué G_∞. On ne sait pas si G et G_∞ sont quasiisométriques. La réponse n'est même pas connue dans des exemples. Jusqu'à présent, aucun invariant de quasiisométrie n'a permis de distinguer G de G_∞. L'invariant de Grötsch pour $n-1 < p \leq d-1$ et l'invariant de Teichmüller t_p pour $p > d$ semblent de bons candidats.

En revanche, il est probable que l'invariant de Hölder ne distingue pas G de G_∞. En effet, dans les groupes nilpotents gradués, cet invariant se lit dans une partie bornée de l'espace : si M est une boule contenant x et y, alors $h_p^M(x,y) \sim h_p(x,y)$.

10.6. Invariant de Hölder en courbure négative. Il est probable que, même pour des espaces homogènes, pour les valeurs intermédiaires de p, $h_p(x,y)$ est anisotrope, i.e., n'est pas équivalent à une fonction de $|x-y|$ seulement.

10.7. Invariant de Kuusalo–Vodopjanov–Goldshtein en courbure négative. Est-il vrai que, pour p grand, $kvg_{p,B}(x,y) \sim D'^{1-p}$ où D' est la distance de B au segment géodésique $[xy]$? Cela voudrait dire que kvg_p capture la distance *visuelle* sur le bord à l'infini, voir [8].

10.8. Un problème posé par Marc Troyanov. Soit $f\colon M \to N$ une application continue ouverte. D'après J. Ferrand [3], f envoie $\mathscr{A}_n(N)$ dans $\mathscr{A}_n(M)$ si et seulement si f est quasirégulière et son degré (nombre d'images réciproques d'un point) est une fonction bornée sur N, voir aussi [27]. Marc Troyanov demande quelle serait la bonne définition d'application de p-dilatation bornée. Il voudrait conserver la propriété $|df|^p \leq \text{const.}\, J_f$ sans que le degré soit borné. On pourrait alors se poser le même genre de question que pour les applications quasirégulières : non existence, propriétés analytiques (ACL, différentiabilité) propriétés topologiques (f est est elle ouverte, discrète), cf. [25], [34].

Marc Troyanov remarque que, si f_1 et f_2 sont de p-dilatation bornée avec $p < n$, alors $f_1 \times f_2$ devrait être de p-dilatation bornée. Par ce procédé, on obtient des exemples très différents des applications quasirégulières. Est-ce que cela signifie qu'on doit attendre des phénomènes nouveaux ?

11. Appendice : formes horizontales sur les groupes nilpotents gradués

On va donner la preuve de la proposition 4.11. Il suffit d'adapter des idées de M. Gromov. Rappelons l'énoncé.

Soit G un groupe nilpotent gradué de dimension n et de dimension isopérimétrique d, muni d'une métrique de Carnot–Carathéodory invariante à gauche. Il existe une constante $l > 0$ qui a la propriété suivante. Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux points de G situés à distance R de l'origine 0. Soit M la variété $M = B(0,2R) \setminus B(0,lR)$. Alors l'invariant de Hölder relatif à M est minoré indépendamment de R, $h_{p,\varepsilon}^M(x,y) \geq \text{const.}$ si $p < d$. Si $p > d$, on a $h_{p,\varepsilon}^M(x,y) \geq \text{const.}\, R^{d-p}$.

Il s'agit minorer des intégrales $\int |du_{|\xi}|^p$. On utilise une famille de courbes tangentes à ξ reliant $B(x,\varepsilon)$ à $B(y,\varepsilon)$ et remplissant convenablement une partie de l'espace, c'est l'argument longueur-aire qui remonte aux origines des temps (voir [29]).

Toutefois, il est plus commode, suivant M. Gromov, [10, 2.3.E], de manipuler des formes différentielles. On utilise la correspondance $X \mapsto i_X\Omega$ entre champs de vecteurs préservant une forme volume Ω et $n-1$-formes fermées. Les champs de vecteurs X tangents à ξ correspondent aux formes *horizontales*, i.e., qui s'annullent sur tous les hyperplans tangents contenant ξ.

Les formes horizontales sont flexibles. Notamment, la condition d'horizontalité ne coûte rien en cohomologie.

11.1. Lemme (M. Gromov, Linear Lemma, [10, 2.2.A]). *Soit G un groupe nilpotent gradué de dimension n. Il existe un opérateur différentiel P des $(n-1)$-formes vers les $(n-2)$-formes tel que, pour toute $(n-1)$-forme ω, $\omega + dP\omega$ soit horizontale.*

M. Gromov en tire l'existence d'un "angle solide", i.e., d'une $n-1$-forme horizontale ω_0 sur $G \setminus \{0\}$, fermée, homogène de degré $d-1$ sous les dilatations δ_t, et d'intégrale non nulle sur le bord de tout domaine contenant l'origine.

Voici une variante de cette construction.

11.2. Lemme. *Soit G un groupe nilpotent gradué muni d'une métrique de Carnot–Carathéodory invariante à gauche. Il existe des constantes K et l qui possède la propriété suivante. Soient x et y deux points de G situés à distance 1 de l'origine. Il existe une $n-1$-forme horizontale fermée ω à support compact dans $M = B(0,2) \setminus B(0,l)$ telle que*

(i) *ω est lisse sauf en x et y ;*
(ii) $|\omega|(z) \leq K \max\{d^c(x,z)^{1-d}, d^c(y,z)^{1-d}\}$;
(iii) *Si Σ est une sphère plongée séparant x de y, alors $\int_\Sigma \omega = 1$.*

Preuve du lemme 11.2. Reprenons la construction de l'angle solide par M. Gromov. Il applique le Linear Lemma à un représentant ω_0 de la classe de cohomologie non triviale de la variété $M = G/\langle\delta_1\rangle$ puis moyenne sous l'action de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur M. En translatant à gauche de x, on obtient un angle solide ω_x centré en x.

Noter qu'on peut demander que le support de ω_x soit un cône de sommet x aussi petit qu'on veut. Ici, un *cône* de sommet x est une partie de G invariante par le groupe $\{\delta_t^x\}$ des dilatations centrées en x, i.e., $z \mapsto x\delta_t(x^{-1}z)$. Appelons *rayons* issus de x les orbites du groupe $\{\delta_t^x\}$.

Si x et $y \in \partial B(0,1)$, il existe un point z de $\partial B(0,1)$ tel que les rayons issus de x et y passant par z ne passent pas par l'origine et fassent un angle non nul en z. Par continuité et compacité, il existe $l > 0$ et $\theta > 0$ tels que, pour tout x et $y \in \partial B(0,1)$, il existe un point z de $\partial B(0,1)$ tel que les cônes C_x et C_y sur la boule $B(z,l)$ ne rencontrent pas la boule $B(0,l)$, et tel que les rayons issus de x et y passant par z fassent un angle $\geq \theta > 0$ en z.

Choisissons un tel z_0. Choisissons des angles solides ω_x et ω_y à support dans C_x (resp. C_y). La forme ω demandée dans l'énoncé va être obtenue par interpolation entre ω_x et ω_y au voisinage de z_0. Pour cela, choisissons des coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ au voisinage de z_0 de sorte que (on note $z' = (z_2, \dots, z_n)$)

(i) sur les cônes C_x et C_y, on a $|z'| < 1$;

(ii) le rayon issu de x (resp. y) arrive en z_0 par valeurs croissantes (resp. décroissantes) de la coordonnée z_1.

11.3. Scholie. *Soient ω_x et ω_y des $(n-1)$-formes fermées sur $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ à support dans le tube $\{|z'| < 1\}$. On suppose que*

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \omega_x = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \omega_y.$$

Il existe une forme fermée ϕ sur $\mathbf{R}^n$ à support dans le tube $\{|z'| < 1\}$, telle que $\phi = \omega_x$ si $z_1 < 0$ et $\phi = \omega_y$ si $z_1 > 1$. De plus, ϕ dépend continûment de ω_x et ω_y en norme C^∞.

Preuve de la scholie. On écrit $\omega_y - \omega_x = A + B \wedge dz_1$ où $A = A_{z_1}$ et $B = B_{z_1}$ sont des formes à support compact dans la boule unité de $\mathbf{R}^{n-1}$ dépendant du paramètre z_1. Comme $\int_{\mathbf{R}^{n-1}} A_0 = 0$, il existe une forme β à support compact dans la même boule telle que $A_0 = d\beta$. On définit une $(n-2)$-forme α sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\alpha(z_1, z') = \beta(0, z') + \int_0^{z_1} B(s, z')\, ds.$$

Alors α est à support dans le tube $\{|z'| < 1\}$ et $d\alpha = \omega_y - \omega_x$. Enfin, soit χ une fonction sur $\mathbf{R}$ qui vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, +\infty[$. Alors $\phi = \omega_x + d\big(\chi(z_1)\alpha\big)$ a les propriétés voulues.

Fin de la preuve du lemme 11.2. Appliquons le Linear Lemma à une interpolation ϕ entre ω_x et ω_y. On obtient une forme fermée horizontale ω dont le support évite la boule $B(0, l)$ et est contenu dans la boule $B(0, 2)$. La norme de ϕ est contrôlée par celle de ω_x (resp. ω_y), autrement dit, par l et la distance à x (resp. y).

11.4. Preuve de la proposition 4.11. On applique le lemme 11.2 aux points $\delta_{1/R}(x)$ et $\delta_{1/R}(y)$. Soit $\omega_R = \delta_{1/R}^* \omega$, c'est une $(n-1)$-forme horizontale fermée à support compact dans $M_R = B(0, 2R) \setminus B(0, lR)$ qui satisfait encore (i) à (iii). On va minorer $h_{p,\varepsilon}(x, y)$. Soit u une fonction de $L_1^p(M)$ qui vaut 1 sur $B(x, \varepsilon)$ et 0 sur $B(y, \varepsilon)$. Notons $X = M_R \setminus B(x, \varepsilon) \setminus B(y, \varepsilon)$.

Par la formule de Stokes,

$$\int_X du \wedge \omega_R = \int_{\partial X} u\omega_R = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \omega_R = 1.$$

Comme ω_R est horizontale, on peut majorer $|du \wedge \omega_R| \le |du_{|\xi}|\,|\omega_R|$ d'où

$$\int_X du \wedge \omega_R \le \left(\int_M |du_{|\xi}|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |\omega_R|^{p/p-1}\right)^{1-1/p}.$$

La deuxième intégrale est majorée par $2\int_\varepsilon^{+\infty} r^{p(1-d)/p-1} \operatorname{vol} \partial B(x,r)\,dr$ où vol désigne ici la mesure de Hausdorff $d-1$-dimensionnelle (formule de la coaire Carnot–Carathéodory). Comme $\operatorname{vol} \partial B(x,r) = \text{const.}\, r^{d-1}$, l'intégrale est majorée par $\varepsilon^{p-d/p-1}$ si $p<d$, par $R^{p-d/p-1}$ si $p>d$ et par $\log(R/\varepsilon)$ si $p=d$. On obtient ainsi une borne inférieure indépendante de R (si $p<d$) ou bien en R^{d-p} (si $p>d$) ou bien en $\log(R/\varepsilon)^{1-d}$ (si $p=d$) pour $h^c_{p,\varepsilon}(x,y)$, donc pour $h^M_p(x,y)$. Ceci achève la preuve de la proposition 4.11.

Références

[1] Adams, R.A.: Sobolev Spaces. - Academic Press, 1975.

[2] Ferrand, J.: Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes. - J. Differential Geom. 8, 1973, 487–510.

[3] Ferrand, J.: Etude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions. - Duke Math. J. 40, 1973, 163–186.

[4] Ferrand, J.: Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds. - Israel J. Math. 69, 1996, 1–24.

[5] Gehring, F.: Rings and quasiconformal mappings in space. - Trans. Amer. Math. Soc. 103, 1962, 353–393.

[6] Goldshtein, V.M., L. Gurov, and A. Romanov: Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces. -Israel J. Math. 91, 1995, 31–60.

[7] Goldshtein, V.M., and M. Rubin: Reconstruction of domains from their groups of quasiconformal autohomeomorphisms. - Differential Geom. Appl. 5, 1995, 205–218.

[8] Gromov, M.: Hyperbolic groups. - In: Essays in Group Theory, edited by S. Gersten, M.S.R.I. Publ. 8, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 75–263.

[9] Gromov, M.: Asymptotic invariants of discrete groups. - In: Geometric group theory, edited by G. Niblo and M. Roller, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 181, 1993.

[10] Gromov, M.: Carnot–Carathéodory spaces seen from within. - Prépublication de I.H.E.S., 1994.

[11] Gromov, M., J. Lafontaine, et P. Pansu: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. - Cedic-Fernand-Nathan, Paris, 1981.

[12] Heinonen, J.: A capacity estimate on Carnot groups. - Bull. Sci. Math. 119, 1995, 475–484.

[13] Heinonen, J., and P. Koskela: Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. - Preprint Univ. Jyväskylä 191, 1996.

[14] Grötzsch, H.: Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit Zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. - Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 80, 1928, 503–507.

[15] Koranyi, A., and H.-M. Reimann: Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group. - Adv. in Math. 111, 1995, 1–87.

[16] Kuusalo, T.: Generalized conformal capacity and quasiconformal metrics. - In: Proc. of the Romanian–Finnish Seminar on Teichmüller spaces and quasiconformal mappings, Brasov, 1969, edited by C. Andreian-Cazacu, Academy of Soc. Rep. Romania, 1971.

[17] Lebesgue, H.: Sur le problème de Dirichlet. - Rend. Circ. Mat. Palermo 24, 1907, 371–402.

[18] Lewis, L.G.: Quasiconformal mappings and Royden algebras in space. - Trans. Amer. Math. Soc. 158, 1971, 481–491.

[19] Nakai, M.: Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces. - Nagoya Math. J. 16, 1960, 157–184.

[20] Pansu, P.: Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. - Ergodic Theory Dynamical Systems 3, 1983, 415–445.

[21] Pansu, P.: An isoperimetric inequality on the Heisenberg group. - In: Proc. of the Conference "Differential Geometry on Homogeneous Spaces, Torino (1983)", Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. spez., 1983, 159–174.

[22] Pansu, P.: Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. - Ann. of Math. 129, 1989, 1–60.

[23] Pansu, P.: Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un. - In: "P.D.E. and Geometry 1988", Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. spez., 1989, 95–120.

[24] Reimann, H.M.: An estimate for pseudoconformal capacities on the sphere. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 14, 1989, 315–324.

[25] Rickman, S.: Quasiregular Mappings. - Ergeb. Math. Grenzgeb. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[26] Royden, H.: The ideal boundary of an open Riemann surface. - In: Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Stud. 30, Princeton Univ. Press, Princeton, 1953, pp. 107–109.

[27] Soderborg, N.: Quasiregular mappings with finite multiplicity and Royden algebras. - Indiana Univ. Math. J. 40, 1991, 1143–1167.

[28] Troyanov, M.: On mappings with codistorsion of class q. - Preprint École Pol. Fed. Lausanne, 1995.

[29] Väisälä, J.: Lectures on n-dimensional Quasiconformal Mappings. - Lecture Notes in Math. 229, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[30] Varopoulos, N.: Analysis on nilpotent groups. - J. Funct. Anal. 66, 1990, 406–431.

[31] Vodopjanov, S.K., and V.M. Goldshtein: Lattices isomorphisms of L_p^1 and quasiconformal mappings. - Siberian Math. J. 16, 1975, 174–189.

[32] Vodopjanov, S.K., and V.M. Goldshtein: Functional characterization of quasiisometrical mappings. - Siberian Math. J. 4, 1976, 580–584.

[33] Vodopjanov, S.K., and V.M. Goldshtein: Metric completion of a domain by using a conformal capacity invariant under quasi-conformal mappings. - Dokl. Akad. Nauk SSSR 238; traduction : Soviet Math. Dokl. 19, 1978, 158–161.

[34] Vuorinen, M.: Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. - Lecture Notes in Math. 1319, Springer-Verlag, 1988.

[35] Yau, S.-T.: Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact manifold. - Ann. Sci. École Norm. Sup. de Paris 8, 1975, 487–507.

Received 4 June 1996