Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 10, 1985, 261—265

Commentationes in honorem
Olli Lehto
LX annos nato

KONFORME VERHEFTUNG UND DIRICHLETSCHES PRINZIP

ALFRED HUBER

In der komplexen Ebene bezeichnen E das Innere, C die Peripherie und A das Äussere (incl. ∞) des Einheitskreises. Ein Homöomorphismus Φ von C auf sich

$$\Phi\colon e^{i\vartheta} \mapsto e^{i\varphi(\vartheta)}, \tag{1}$$

$0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, $\Phi(1)=1$, sei gegeben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, Φ sei analytisch, so dass eine Differentialgleichung der Form

$$e^{u(e^{i\vartheta})}\, d\vartheta = e^{-v(e^{i\varphi})}\, d\varphi \tag{2}$$

(u, v harmonisch auf C) erfüllt ist. Als Folge des Uniformisierungssatzes gibt es eine (analytische) Jordankurve Γ, dazu eine konforme Abbildung f von E auf das Innere von Γ sowie eine konforme Abbildung g von A auf das Äussere von Γ derart, dass

$$f(e^{i\vartheta}) = g(e^{i\varphi(\vartheta)}) \tag{3}$$

für alle ϑ. (Wir normieren $g(\infty)=\infty$, so dass Γ bis auf eine ganze lineare Transformation festgelegt ist.)

Es bezeichne D den linearen Raum der harmonischen Funktionen $h\colon E \to \boldsymbol{R}$ mit finiten Dirichletintegral,

$$\iint_E (h_x^2 + h_y^2)\, dx\, dy < \infty.$$

Durch Einführung des Skalarproduktes

$$(f, g)_D := \iint_E (f_x g_x + f_y g_y)\, dx\, dy$$

wird D zu einem Hilbertraum. (Dabei sind Funktionen miteinander zu identifizieren, welche sich nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden.)

Definition *der Abbildung* $S\colon h \mapsto h^*$: *Jeder auf* $E \cup C$ *harmonischen Funktion* h *wird eine (ebenfalls auf* $E \cup C$ *harmonische) Funktion* h^* *zugeordnet. Diese ist dadurch charakterisiert, dass — bei geeigneter Wahl der Konstanten — für alle reellen* ϑ *die Gleichung*

$$\tilde{h}^*(\Phi(e^{i\vartheta})) + \arg \Phi(e^{i\vartheta}) = \tilde{h}(e^{i\vartheta}) + \arg e^{i\vartheta} \tag{4}$$

erfüllt sein soll. (Die Tilde ($\sim$) wird hier und im folgenden zur Bezeichnung der konjugiert harmonischen Funktion verwendet.)

doi:10.5186/aasfm.1985.1029

Definition *des Funktionals* $J: h \mapsto J(h)$: *Jeder auf* $E \cup C$ *harmonischen Funktion* h *wird die Zahl*

$$J(h) := \iint_E [(u_x - h_x)^2 + (u_y - h_y)^2 + (v_x - h_x^*)^2 + (v_y - h_y^*)^2]\, dx\, dy$$

zugeordnet. Hier und im folgenden bezeichnet u (respektive v) diejenige Funktion aus D, welche auf C die Randwerte $u(e^{i\vartheta})$ (respektive $v(e^{i\varphi})$) aus Relation (2) annimmt.

Satz. *Die Funktion* $w(z) = \log |f'(z)|$ *ist dadurch charakterisiert, dass*

$$J(w) \leqq J(h) \tag{5}$$

für alle auf $E \cup C$ *harmonischen Funktionen h. Es gilt dann* $w^*(z) = -\log |g'(\bar{z}^{-1})|$, $z \in E$. *(Die Funktionen* w *und* w^* *sind durch* Φ *und die Normierung* $g(\infty) = \infty$ *eindeutig festgelegt.)*

Bemerkungen. 1. Eine andere Extremaleigenschaft solcher Verheftungen wurde 1960 von H. Grunsky [2] entdeckt: die Kurve Γ ist so beschaffen, dass eine gewisse (durch Φ bestimmte) Ladungsverteilung auf ihr zur Gleichgewichtsverteilung wird.

2. Bekanntlich gibt es auch *nicht*-analytische Verheftungen Φ, welche „konform zulässig" sind, d. h. für welche eine Jordankurve Γ und zugehörige konforme Abbildungen f und g mit den eingangs erwähnten Eigenschaften existieren. Die Theorie der quasikonformen Abbildungen hat auf eine grosse Klasse solcher Verheftungen geführt: Es gelang O. Lehto und K. I. Virtanen [4, 5] sowie — auf dem Weg über ein Resultat von A. Beurling und L. V. Ahlfors [1] — A. Pfluger [6] zu zeigen, dass alle quasisymmetrischen Verheftungen konform zulässig sind. (Die zugehörige Jordankurve Γ ist in diesem Falle ein Quasikreis.) Durch das nachstehende Lemma 3 wird nun eine weitere Methode für den Beweis der konformen Zulässigkeit einer „genügend regulären" Verheftung nahegelegt: die Orthogonalprojektion im Hilbertraum.

Es gibt jedoch Homöomorphismen Φ, welche *nicht* konform zulässig sind. Ein Beispiel eines (sogar absolut stetigen) derartigen Homöomorphismus wurde in [3] konstruiert.

Beweis des Satzes

Lemma 1. *Der (auf* $E \cup C$ *harmonischen) Funktion* $w(z) = \log |f'(z)|$ *wird durch die Abbildung* S *die Funktion* $w^*(z) = -\log |g'(\bar{z}^{-1})|$ *zugeordnet.*

Beweis von Lemma 1. Sei

$$\log f'(z) = p(z) + i\tilde{p}(z), \quad \log g'(z) = q(z) + i\tilde{q}(z).$$

Aus Gleichung (3) schliessen wir, dass

$$f'(e^{i\vartheta})ie^{i\vartheta}\,d\vartheta = g'(e^{i\varphi})ie^{i\varphi}\,d\varphi, \tag{6}$$

und somit

$$\exp\left\{p(e^{i\vartheta})+i\left[\tilde{p}(e^{i\vartheta})+\arg e^{i\vartheta}+\frac{\pi}{2}\right]\right\}d\vartheta$$

$$= \exp\left\{q(\Phi(e^{i\vartheta}))+i\left[\tilde{q}(\Phi(e^{i\vartheta}))+\arg\Phi(e^{i\vartheta})+\frac{\pi}{2}\right]\right\}d\varphi.$$

Ein Vergleich von Bedingung (4) mit den Imaginärteilen in den Exponenten der letzten Beziehung lässt q als Bild von p bei der Abbildung S erscheinen. Nun ist aber noch zu berücksichtigen, dass q auf $A\cup C$ (statt auf $E\cup C$) definiert ist. Nach Verpflanzung bei Inversion ist $-q$ diejenige harmonische Funktion, zu wlcher $\tilde{q}$ konjugiert harmonisch ist. Man gelangt so zu

$$w^*(z) = -\log|g'(\bar{z}^{-1})|, \quad \text{QED.}$$

Lemma 2. *Für alle* ϑ *und zugehörigen* $\varphi(\vartheta)$ *gilt die Gleichung*

$$u(e^{i\vartheta})+v(e^{i\varphi}) = w(e^{i\vartheta})+w^*(e^{i\varphi}). \tag{7}$$

Dabei sind u *und* v *in Relation* (2), w *und* w^* *in Lemma* 1 *definiert.*

Beweis von Lemma 2. Aus (2) entnehmen wir

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \exp\{u(e^{i\vartheta})+v(e^{i\varphi})\}. \tag{8}$$

Aus (6) folgt

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{|f'(e^{i\vartheta})|}{|g'(e^{i\varphi})|} = \exp\{\log|f'(e^{i\vartheta})|-\log|g'(e^{i\varphi})|\}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) ergibt sich (7), QED.

Im folgenden arbeiten wir mit dem Hilbertraum $H:=D\oplus D$, dessen Elemente die geordneten Paare $[a, b]$, a und b Elemente aus D, sind und in welchem das Skalarprodukt mit

$$([a, b], [c, d])_H := (a, c)_D+(b, d)_D$$

definiert ist. In H betrachten wir die Mengen $L:=\{[h, h^*]-[w, w^*]|\, h$ harmonisch auf $E\cup C\}$, $M:=\{[h, h^*]|\, h$ harmonisch auf $E\cup C\}$. Ferner bezeichne Π die abgeschlossene Hülle von L, Σ die abgeschlossene Hülle von M. Man verifiziert leicht: L ist eine lineare Mannigfaltigkeit, Π ein (abgeschlossener) Unterraum. Folglich ist Σ eine Hyperebene in H.

Lemma 3. *Der Punkt* $[w, w^*]$ *ist die Orthogonalprojektion des Punktes* $[u, v]$ *auf die Hyperebene* Σ.

Beweis von Lemma 3. Wir bemerken zunächst, dass

$$(p, q)_D = \iint_E (p_x q_x + p_y q_y)\, dx\, dy = \int_C p \frac{\partial q}{\partial n} |dz|$$

für irgend zwei auf $E \cup C$ harmonische Funktionen p und q. (Hier bezeichnet n die Richtung der äusseren Normalen zu C.) Somit ist

$$(10) \qquad (u-w, h-w)_D = \int_0^{2\pi} (u(e^{i\vartheta}) - w(e^{i\vartheta})) \left[\frac{\partial h}{\partial n}(e^{i\vartheta}) - \frac{\partial w}{\partial n}(e^{i\vartheta})\right] d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} (u(e^{i\vartheta}) - w(e^{i\vartheta})) \left[\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \vartheta}(e^{i\vartheta}) - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vartheta}(e^{i\vartheta})\right] d\vartheta.$$

Wenden wir nun Lemma 2 und Relation (4) an und gehen wir auf die Integrationsvariable φ über, so erhalten wir

$$(11) \qquad \int_0^{2\pi} (u(e^{i\vartheta}) - w(e^{i\vartheta})) \left[\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \vartheta}(e^{i\vartheta}) - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vartheta}(e^{i\vartheta})\right] d\vartheta$$

$$= -\int_0^{2\pi} (v(e^{i\varphi}) - w^*(e^{i\varphi})) \left[\frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial \varphi}(e^{i\varphi}) - \frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial \varphi}(e^{i\varphi})\right] d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} (v(e^{i\varphi}) - w^*(e^{i\varphi})) \left[\frac{\partial h^*}{\partial n}(e^{i\varphi}) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(e^{i\varphi})\right] d\varphi$$

$$= -(v - w^*, h^* - w^*)_D.$$

Aus (10) und (11) folgt, dass

$$([u, v] - [w, w^*], [h, h^*] - [w, w^*])_H$$

$$= (u-w, h-w)_D + (v-w^*, h^*-w^*)_D = 0$$

für alle Funktionen h, welche auf $E \cup C$ harmonisch sind. Der Vektor $[u, v] - [w, w^*]$ steht also senkrecht auf allen zu L gehörigen Vektoren. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Beweis des Satzes. Aus dem Vorangegangenen geht hervor, dass $[w, w^*]$ der am nächsten bei $[u, v]$ gelegene Punkt von M ist. Es gilt

$$J(w) = \|[u, v] - [w, w^*]\|_H^2$$

$$\leqq \|[u, v] - [h, h^*]\|_H^2 = J(h)$$

für alle $[h, h^*] \in M$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $[h, h^*] = [w, w^*]$. Damit ist alles bewiesen.

Literatur

[1] BEURLING, A., and L. AHLFORS: The boundary correspondence under quasiconformal mappings. - Acta Math. 96, 1956, 125—142.

[2] GRUNSKY, H.: Eine Grundaufgabe der Uniformisierungstheorie als Extremalproblem. - Math. Ann. 139, 1960, 204—216.

[3] HUBER, A.: Isometrische und konforme Verheftung. - Comment. Math. Helv. 51, 1976, 319—331.

[4] LEHTO, O., and K. I. VIRTANEN: On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 274, 1960, 1—24.

[5] LEHTO, O., und K. I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen. - Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965.

[6] PFLUGER, A.: Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung. - J. Indian Math. Soc. (N.S.) 24, 1960, 401—412.

Eidgenössische Technische Hochschule
Mathematisches Seminar
CH-8092 Zürich
Schweiz

Eingegangen am 12. März 1984